تئوری Z-NUMBER و کاربرد آن در روش ARAS

استاد: خانم دکتر پیشدار

ارائه‌دهنده: ثریا بیرامی – دانشجوی دکتری

مدیریت صنعتی دانشگاه تهران

گرایش تحقیق در عملیات

Sanaye20.ir

معرفی تئوری Z- Number

در محیط پیچیده تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیرندگان می‌توانند بر اساس اطلاعات نامطمئن، نادرست یا ناقص، تصمیمات منطقی اتخاذ کنند. برای استفاده از مدل ریاضی برای اندازه‌گیری این توانایی ویژه انسان، در سال ۲۰۱۱، زاده مفهوم عدد Z را بر اساس نظریه مجموعه فازی به منظور فراهم کردن پایه‌ای برای برخورد با اعدادی که کاملاً قابل اعتماد نیستند، و توصیف بهتر اطلاعات نامطمئن در فرآیند تصمیم-گیری پیشنهاد کرد (Li et al., 2022).

Sanaye20.ir

Z- Number: Definition 1

Zadeh (2011)

اگر $X = (\tilde{A}$ و $\tilde{R})$ یک عدد Z باشد، این عدد به صورت یک جفت بیان می‌شود که در آن $\tilde{A}$ یک تابع محدودیت (یک محدودیت روی اعداد حقیقی غیرقطعی x) است در حالی که مؤلفه دوم $\tilde{R}$ یک معیار قابلیت اطمینان برای مؤلفه اول است. هنگامی که $a2$ برابر با $a3$ باشد، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای به یک عدد فازی مثلثی تبدیل می‌شود (شکل مربوط به اسلاید بعدی) (به نقل از Kahraman & Otay, 2018).

Zadeh (2011)

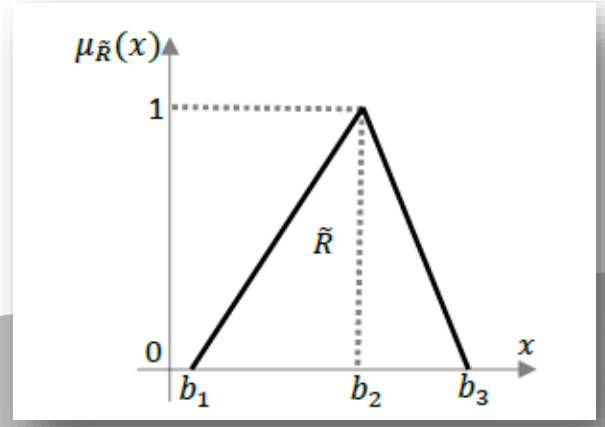
عدد Z یک جفت مرتب $Z = (A, B)$ از اعداد فازی پیوسته است که برای توصیف یک متغیر نامطمئن با ارزش واقعی X استفاده می‌شود، که در آن مؤلفه اول A محدودیت فازی (Restriction or Constraint) بر روی مقدار قابل‌قبول X است و مؤلفه دوم B شاخصی برای اندازه‌گیری قابلیت اطمینان (Reliability) مؤلفه اول یعنی A است (به نقل از Li et al., 2022; Tüysüz & Kahraman, 2023).

توجه: دو تعریف فوق به یک مفهوم می‌باشند، با نمادهای متفاوت.

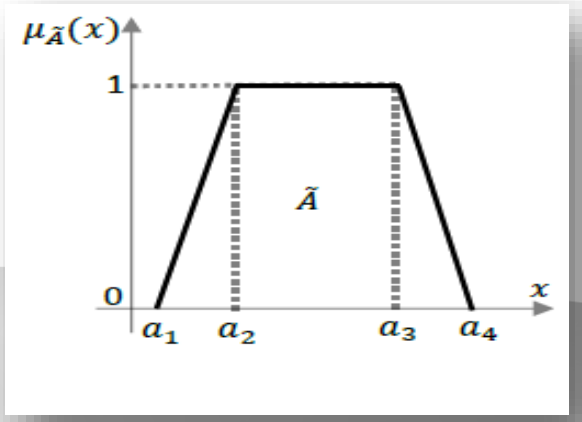
Sanaye20.ir

نمایش ترسیمی یک جفت عدد Z (Kahraman & Otay, 2018)

1 $\tilde{R}$ یک عدد فازی مثلثی



2 عدد $\tilde{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای



Sanaye20.ir

Z- Number: Definition 2

Kahraman & Otay, 2018

فرض کنید یک مجموعه فازی A بر روی یک مجموعه کلی X تعریف شده باشد، به‌صورت $A=\{x,\mu_A(x)|x\in X\}$ که در آن $\mu A:X\rightarrow[0,1]$ تابع عضویت A است. مقدار عضویت $\mu A(x)$ درجه تعلق $x\in X$ به A را توصیف می‌کند. توقع فازی یک مجموعه فازی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$E_A(x)=\int_x x\mu_A(x)\,dx$$

که با معنای انتظار فضای احتمال یکسان نیست. این را می‌توان به‌عنوان قدرت اطلاعاتی پشتیبانی‌کننده مجموعه فازی A در نظر گرفت.

Tüysüz & Kahraman, 2023

فرض کنید یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی یک مجموعه کلی X به‌صورت $\tilde{A}=\{x,\mu_{\tilde{A}}(x)|x\in[0,1]\}$ تعریف شده باشد، که در آن $\mu_{\tilde{A}}: X\rightarrow[0,1]$ تابع عضویت $\tilde{A}$ است. مقدار عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه تعلق $x\in X$ به $\tilde{A}$ را توصیف می‌کند. توقع فازی یک مجموعه فازی در معادله زیر داده شده است:

$$E_A(x)=\int_x x\mu_A(x)\,dx$$

که با انتظار فضای احتمال یکسان نیست.

توجه: دو تعریف فوق به یک مفهوم می‌باشند، با نمادهای متفاوت.

Sanaye20.ir

Definition 3: Converting a Z-number to a regular fuzzy number

عدد $Z = (\tilde{A}$ و $\tilde{R})$ را که در شکل اسلاید چهارم نشان داده شده است در نظر بگیرید. سمت چپ قسمت محدودیت و سمت راست قسمت قابلیت اطمینان است. فرض کنید

$\tilde{A} = \{x,\ \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in [0,1]\}$ و

$\tilde{R} = \{x, \mu_{\tilde{R}}(x) | x \in [0,1]\}$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای است و $\mu_{\tilde{R}}(x)$ یک تابع عضویت مثلثی است (Kahraman & Otay, 2018; Tüysüz & Kahraman, 2023).

Sanaye20.ir

اعداد Z برای ادامه مراحل محاسبات در حل مسائل تصمیم‌گیری به اعداد فازی معمولی تبدیل می‌شوند. رایج‌ترین روش در این فرآیند تبدیل توسط Kang et al (2012) توسعه یافته است. بدین‌ترتیب در ابتدا، مؤلفه دوم (یعنی $\widetilde{R}$) با استفاده از روش مرکز ثقل به مقدار قطعی تبدیل می‌شود. به‌عبارتی، وزن قابلیت اطمینان (α) با تبدیل مؤلفه دوم عدد Z به یک عدد قطعی با استفاده از معادله زیر محاسبه می‌شود (یعنی درجه قطعیت هر عدد Z).

$$\alpha = \frac{\int x\, \mu_{\tilde{R}}(x) dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x) dx}$$

در معادله (بالا)، $\int$ نشان‌دهنده یک انتگرال جبری است و مقدار α به‌عنوان وزن بخش محدودیت عدد Z در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این معادله، $\mu_{\tilde{R}}(x)$ درجه عضویت $x \in X$ در $\widetilde{R}$ و درجه عضویت $x \in X$ در $\widetilde{A}^{a}$ را نشان می‌دهد.

Sanaye20.ir

1. Defuzzification

به‌عنوان جایگزین معادله ($\alpha = \frac{\int x\mu_{\tilde{R}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x)dx}$)، می‌توان از دو معادله دی‌فازیفیکیشن زیر استفاده کرد.

$$\frac{a1 + 2 \times a2 + a3}{4}$$

دی‌فازیفیکیشن برای اعداد فازی مثلثی متقارن

$$\frac{a1 + 2 \times a2 + 2 \times a3 + a4}{6}$$

دی‌فازیفیکیشن برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای متقارن

Sanaye20.ir

2. Weigh the restriction function with the crisp value of the reliability function (α)

در این مرحله، وزن قابلیت اطمینان به‌دست‌آمده (یعنی α) با استفاده از معادله ($\alpha = \frac{\int x\mu_{\tilde{R}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x)dx}$ یا معادلات دیفازیکیشن اسلاید قبلی) در معادله زیر به مؤلفه اول عدد Z (یعنی $\tilde{A}$) اعمال می‌شود، که به‌معنای عدد محدودیت وزنی (یعنی $\tilde{Z}^{a}$) خوانده می‌شود (Kahraman & Otay, 2018; Tüysüz & Kahraman, 2023):

$$\tilde{Z}^{a} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}) |\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha\mu_{\tilde{A}}(x), x \in [0,1]\}$$

Sanaye20.ir

3. Convert the irregular fuzzy number (weighted restriction) to a regular fuzzy number

در نهایت، عدد محدودیت وزنی (عدد محدودیت وزنی یا همان $\tilde{Z}^{a}$) با استفاده از معادله زیر به عدد فازی معمولی تبدیل می‌شود (Kahraman & Otay, 2018; Tüysüz & Kahraman, 2023).

$$\tilde{Z}' = \left\{ \left(x, \mu_{z'}(x) \right) \middle| \mu_{z'}(x) = \mu_{\tilde{A}} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right), \mu(x), x \in [0,1] \right\}$$

شکل ساده معادله بالا را می‌توان به‌صورت زیر (یعنی معادله زیر) نوشت (Adalı & Tuş, 2023; Tan et al., 2024):

$$\tilde{Z}' = (a_1\sqrt{a}, a_2\sqrt{a}, a_3\sqrt{a})$$

Sanaye20.ir

Kang et al (2012)

4 A Numerical Example

In this section, a numerical example is used to illustrate the procedure of our approach. Assume an expert gives his opinion as follows:

$$\tilde{\mathrm{A}} = (0.7, 0.8, 0.9, 1;\ 1)$$

and his reliability is

$$\tilde{R} = (0.8, 0.9, 1;\ 1)$$

The Expert's knowledge can be expressed to Z-number as

$$\tilde{Z} = \left(\tilde{A}, \tilde{R}\right) = [(0.7, 0.8, 0.9, 1;\ 1), (0.8, 0.9, 1;\ 1)]$$

At first, we should to convert expert's reliability into crisp number according Eq. (5)

$$\alpha = \frac{\int x\mu_{\tilde{R}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x)dx} = 0.9$$

Second, Add the weight of reliability to the constraint.

$$\tilde{Z}^{\alpha} = (0.7, 0.8, 0.9, 1;\ 0.9)$$

Third, Convert the weighted Z-number to regular fuzzy number according to the proposed approach.

$$\begin{aligned}\tilde{Z}' &= \left(\sqrt{0.9} \times 0.7, \sqrt{0.9} \times 0.8, \sqrt{0.9} \times 0.9, \sqrt{0.9} \times 1;\ 1\right) \\ &= (0.9487 \times 0.7, 0.9487 \times 0.8, 0.9487 \times 0.9, 0.9487 \times 1;\ 1) \\ &= (0.6641, 0.7589, 0.8538, 0.9487;\ 1)\end{aligned}$$

Sanaye20.ir

Example 1 Let $A = (0.1,0.2,0.3,0.4)$ and $B = (0.5,0.7,0.9)$. $A(x)$ represents a trapezoidal membership function, and $B(x)$ represents a triangular membership function. According to the Definition 4 proposed the operational laws, we obtain as follows:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x\epsilon(-\infty, 0.5) \\ \dfrac{(x-0.5)}{(0.7-0.5)}, & x\epsilon[0.5,0.7] \\ \dfrac{(0.9-x)}{(0.9-0.7)}, & x\epsilon[0.7,0.9] \\ 0, & x\epsilon(0.9, +\infty) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\int x\mu_B(x)dx}{\int \mu_B(x)dx}$$

$$= \frac{\int_{0.5}^{0.7} x\frac{(x-0.5)}{(0.7-0.5)}dx + \int_{0.7}^{0.9} x\frac{(0.9-x)}{(0.9-0.7)}dx}{(0.9-0.5)/2} = 0.7$$

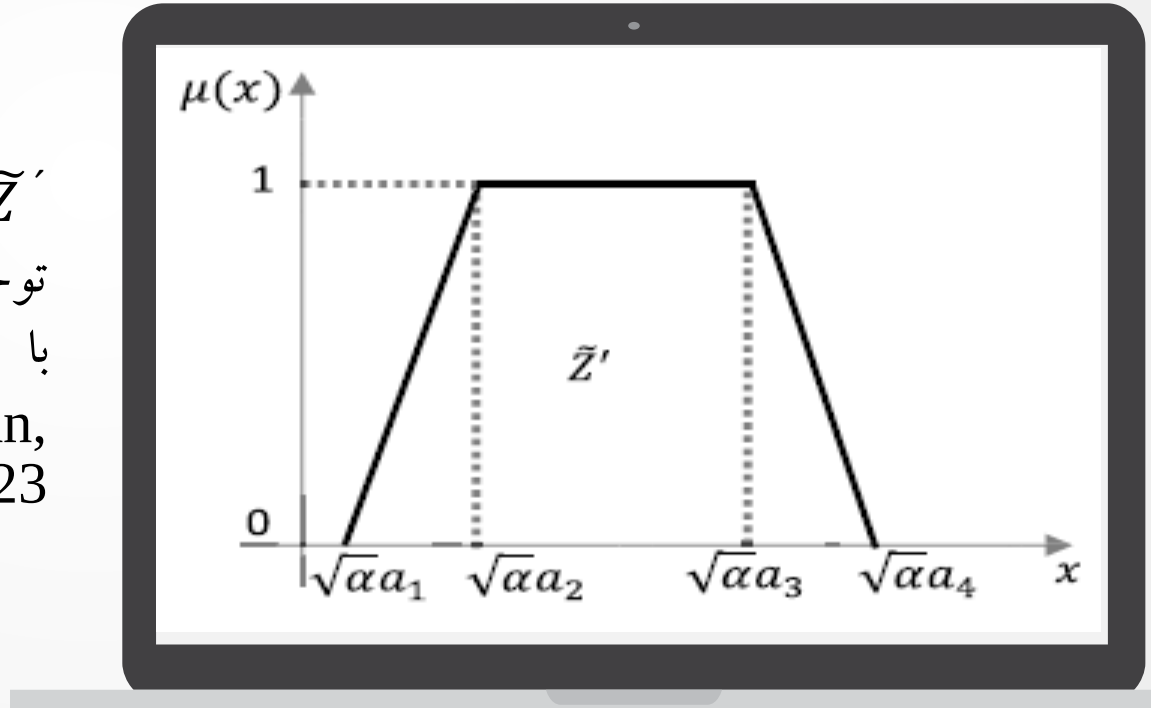
$$Z^A = (\sqrt{\alpha}a_1, \sqrt{\alpha}a_2, \sqrt{\alpha}a_3, \sqrt{\alpha}a_4)$$
$$= (\sqrt{0.7} \times 0.1, \sqrt{0.7} \times 0.2, \sqrt{0.7} \times 0.3, \sqrt{0.7} \times 0.4) = (0.084,0.167,0.251,0.335)$$

Tan et al (2024)

Sanaye20.ir

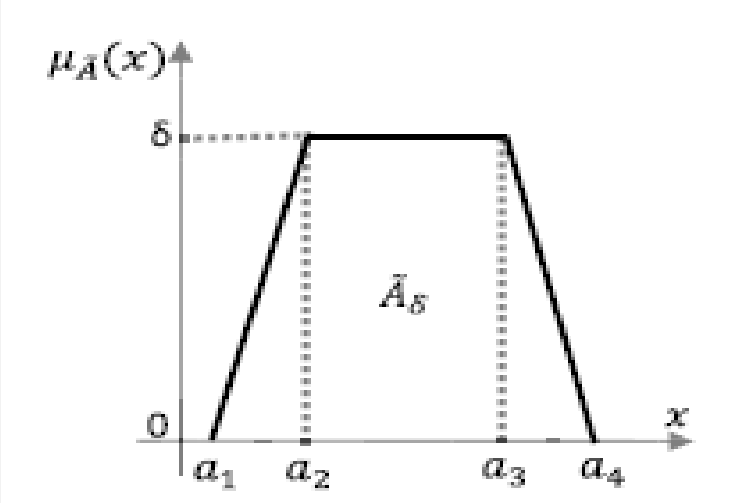
Ordinary fuzzy number transformed from Z-number

$\tilde{Z}'$ دارای همان انتظار فازی با $\tilde{Z}^{a}$ است و این‌دو با توجه به انتظار فازی برابر هستند، که می‌توان آن را با شکل روبرو نشان داد (Kahraman & Otay, 2018; Tüysüz & Kahraman, 2023).

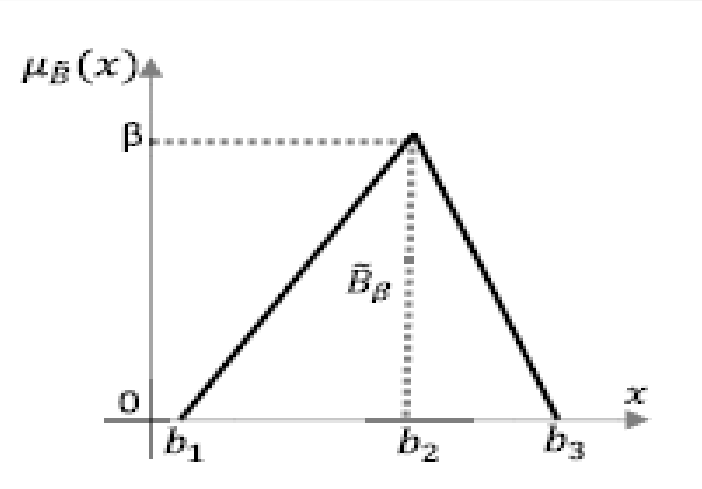


Sanaye20.ir

اگر تابع محدودیت و تابع قابلیت اطمینان همانطور که در شکل زیر تعریف شده‌اند، باشد؛ محاسبات به صورت زیر اصلاح می‌شوند (Tüysüz & Kahraman, 2023):



$$\tilde{A}_\delta = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x); \delta | \mu(x) \in [0,1]\}$$



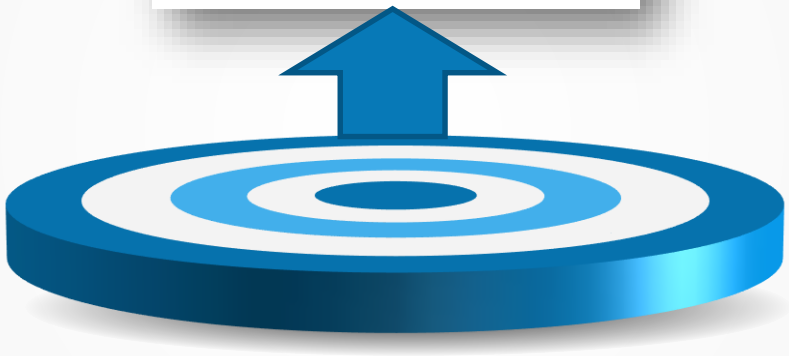
$$\tilde{B}_\beta = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x); \beta | \mu(x) \in [0,1]\}$$

Sanaye20.ir

$$\mu_{\tilde{A}}^{\delta}(x)=\begin{cases}\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\delta, & \text{if } a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\\ \delta, & \text{if } a_2 \leqslant x \leqslant a_3,\\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}\delta, & \text{if } a_3 \leqslant x \leqslant a_4,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

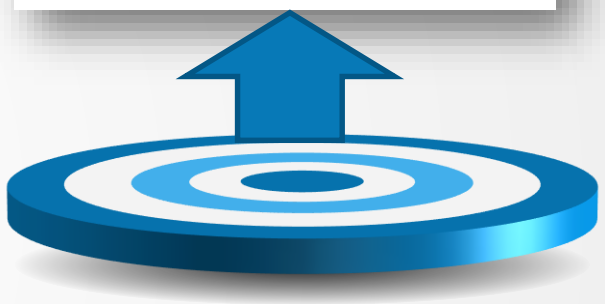
تابع محدودیت

$$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\frac{\int x\mu_{\tilde{B}}^{\beta}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{B}}^{\beta}(x)dx}}.$$



وزن قابلیت اطمینان

$$\mu_{\tilde{B}}^{\beta}(x)=\begin{cases}\frac{x-b_1}{b_2-b_1}\beta, & \text{if } b_1 \leqslant x \leqslant b_2,\\ \frac{b_3-x}{b_3-b_2}\beta, & \text{if } b_2 \leqslant x \leqslant b_3,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



تابع قابلیت اطمینان

Sanaye20.ir

عدد وزندار $\tilde{Z}^{a}_{\delta,\beta}$

$$\tilde{Z}^{\alpha}_{\delta,\beta}=\left\{\langle x,\mu^{\delta}_{\tilde{A}^{\alpha}}(x)\rangle \,\middle|\, \mu^{\delta}_{\tilde{A}^{\alpha}}(x)=\frac{\int x\mu^{\beta}_{\tilde{B}}(x)dx}{\int \mu^{\beta}_{\tilde{B}}(x)dx}\mu^{\delta}_{\tilde{A}}(x),\ \mu(x)\in[0,1]\right\}$$

تبدیل عدد فازی Z به عدد قطعی

$$\tilde{Z}'_{\delta,\beta}=\left\{\langle x,\mu^{\delta}_{\tilde{z}'}(x)\rangle \,\middle|\, \mu^{\delta}_{\tilde{z}'}(x)=\mu^{\delta}_{\tilde{A}}\left(x\frac{\int \mu^{\beta}_{\tilde{B}}(x)dx}{\int x\mu^{\beta}_{\tilde{B}}(x)dx}\right),\ \mu(x)\in[0,1]\right\}$$

Sanaye20.ir

مقیاس‌های زبانی همراه با اعداد فازی مثلثی برای قابلیت اطمینان و محدودیت (Zafaranlouei et al, 2023)

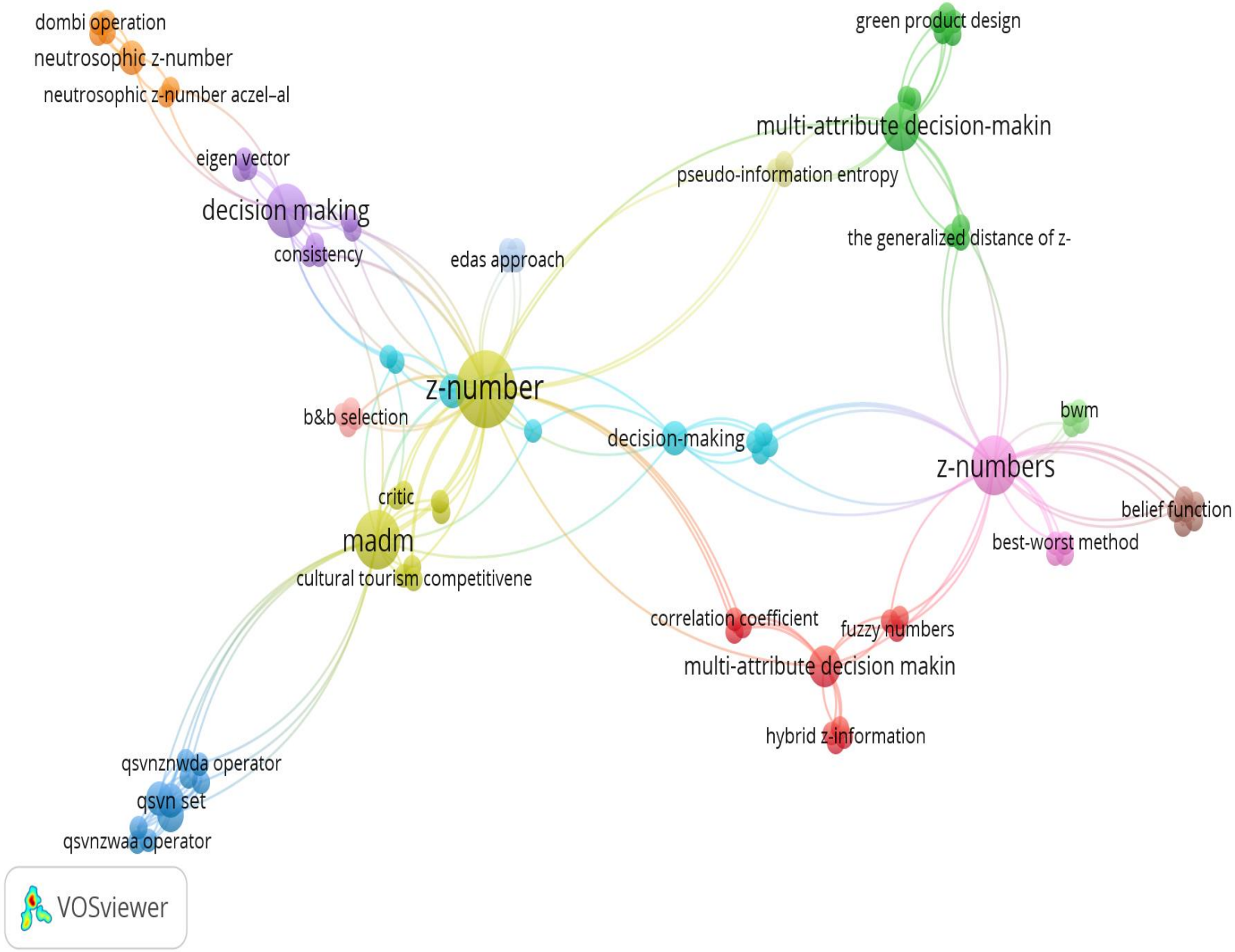
محدودیت			قابلیت‌اطمینان		
LT_S	نماد	اعداد فازی مثلثی (TFNs)	LT_S	نماد	اعداد فازی مثلثی (TFNs)
اهمیت برابر	EI	(۱ و ۱ و ۱)	بسیار پایین	VL	(۰.۳ و ۰ و ۰)
بین اهمیت برابر و ضعیف مهم	IEWA	(۳ و ۲ و ۱)	پایین	L	(۰.۵ و ۰.۳ و ۰.۱)
اهمیت خیلی کم	WI	(۴ و ۳ و ۲)	متوسط	M	(۰.۷ و ۰.۵ و ۰.۳)
بین ضعیف مهم و نسبتاً مهم	IWFI	(۵ و ۴ و ۳)	بالا	H	(۰.۹ و ۰.۷ و ۰.۵)
نسبتاً مهم	FI	(۶ و ۵ و ۴)	بسیار بالا	VH	(۱.۰ و ۱.۰ و ۰.۷)
بین نسبتاً مهم و بسیار مهم	IFVI	(۷ و ۶ و ۵)			
بسیار مهم	VI	(۸ و ۷ و ۶)			
بین بسیار مهم و فوق‌العاده مهم	IVAI	(۹ و ۸ و ۷)			
کاملا مهم	AI	(۹ و ۹ و ۸)			

Sanaye20.ir

خروجی نرم‌افزار VOS VIEWER در زمینه کاربرد Z-NUMBER در تصمیم‌گیری چندمعیاره تا سال ۲۰۲۴

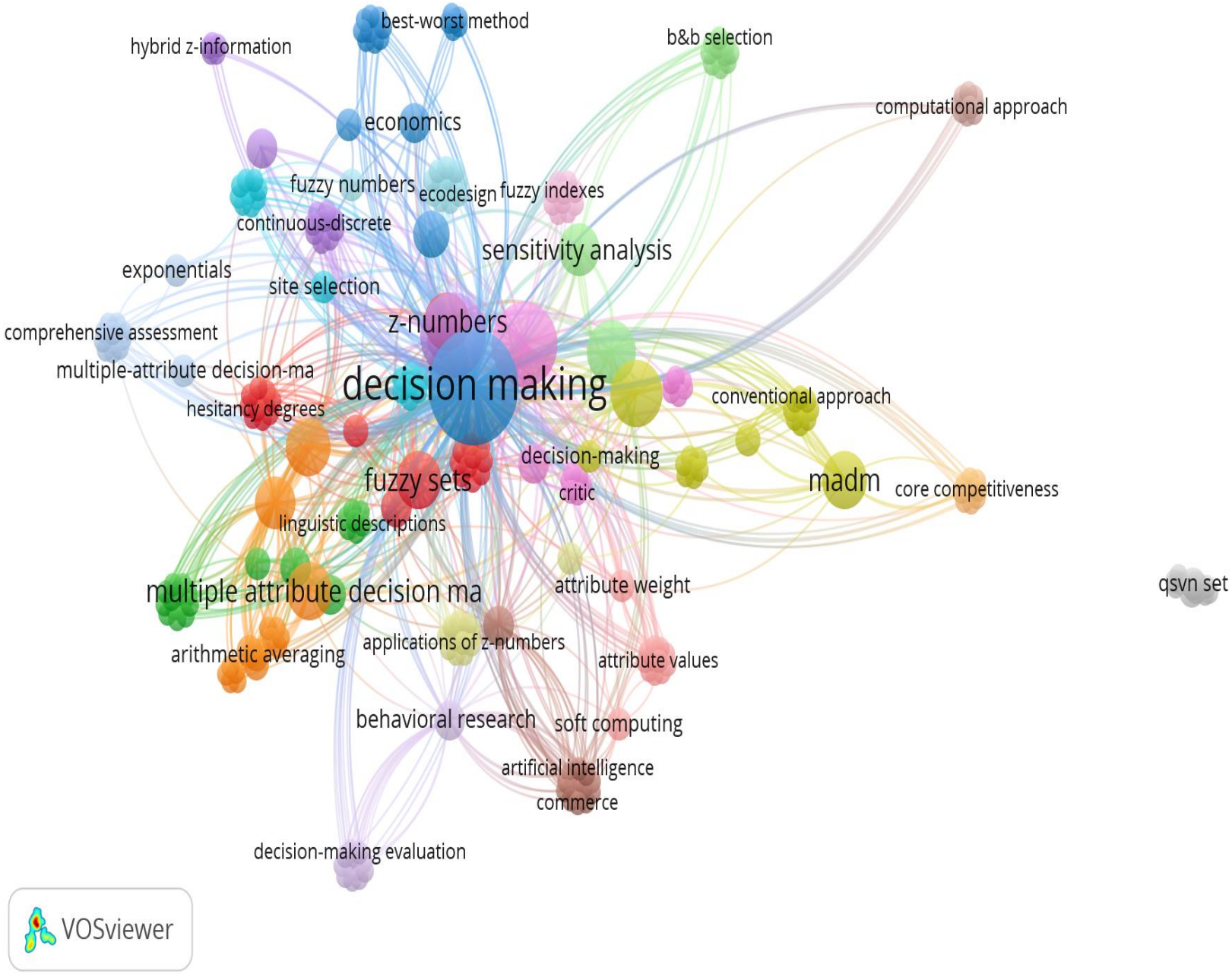
Sanaye20.ir

خروجی VOSviewer برای Z-numbers and MADM



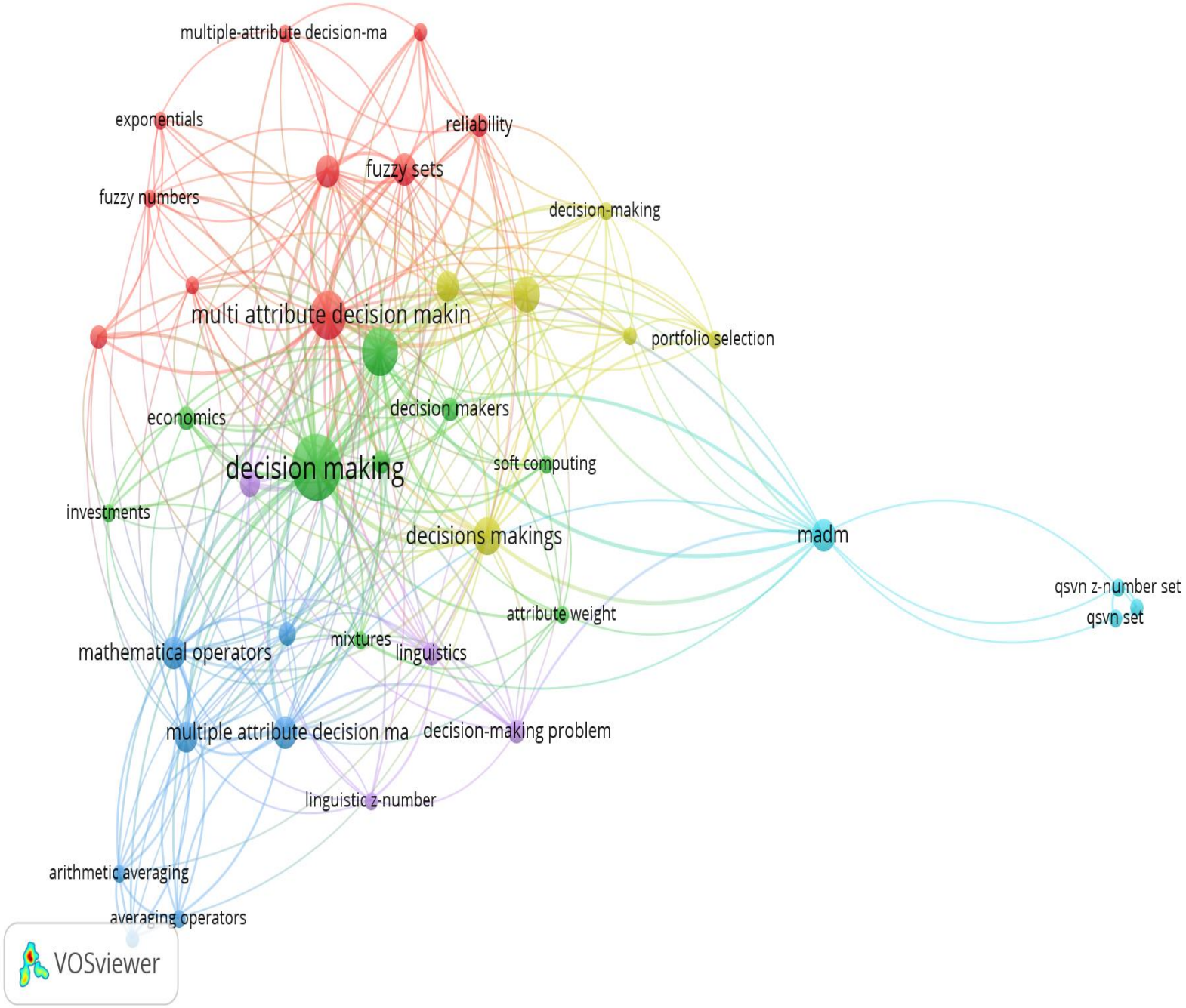
Sanaye20.ir

خروجی VOSviewer برای Z-numbers and MADM



Sanaye20.ir

خروجی VOSviewer برای Z-numbers and MADM

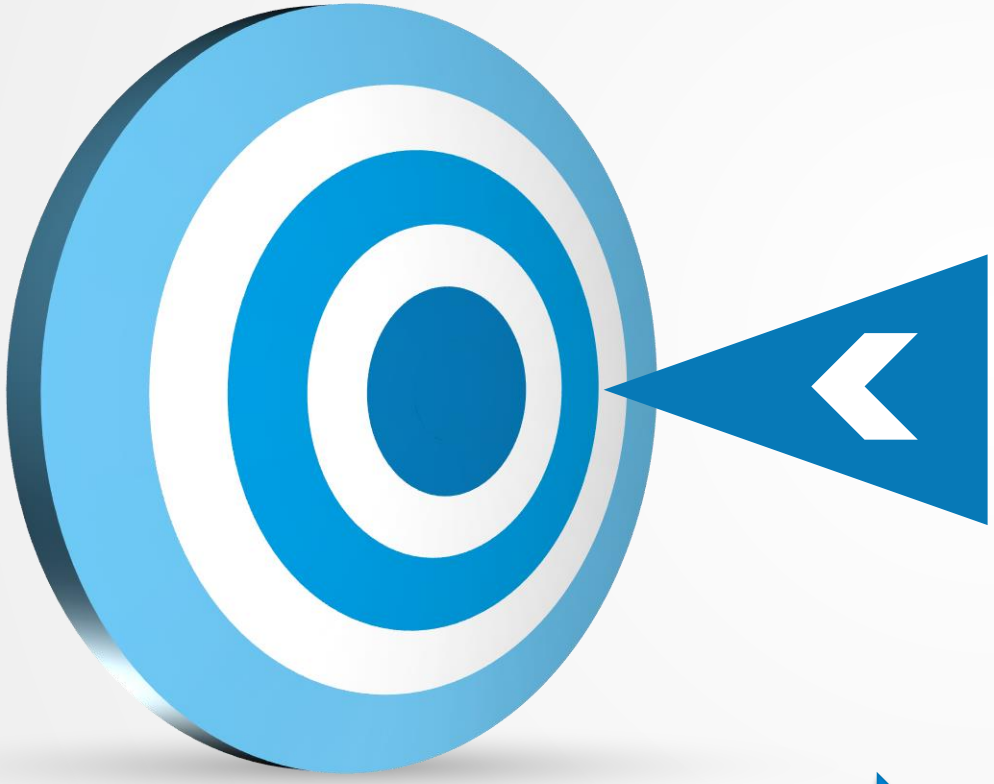


Sanaye20.ir

مثال عددی: روش ARAS در محیط قطعی

Sanaye20.ir

هدف روش ARAS



روش آراس (ARAS) یکی از روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره است که در سال ۲۰۱۰ توسط آقای زاوادسکاس و ترکسیس معرفی شد. واژه ARAS مخفف جمله Additive Ratio Assessment به معنی ارزیابی نسبت جمعی می‌باشد. ماتریس تصمیم روش ARAS همانند روش‌های تاپسیس یا ویکور یا الکتره به صورت معیار-گزینه است. این روش برای انجام نیازمند وزن معیارها است پس باید ابتدا توسط روشهایی نظیر آنتروپی شانون و یا روش AHP وزن معیارها را محاسبه کرد سپس توسط این روش گزینه‌ها را رتبه‌بندی نمود.

نکته

پرسشنامه روش ARAS همانند پرسشنامه روش تاپسیس می‌باشد.

Sanaye20.ir

گام‌های روش ARAS

1

تشکیل ماتریس تصمیم و محاسبه وزن معیارها

ماتریس تصمیم این روش جهت ارزیابی گزینه‌های مساله، ماتریسی است که سطرهای آن را گزینه‌ها و ستون‌های آن را معیارهای پژوهش تشکیل می‌دهد.

2

تعیین معیارهای مثبت و منفی
تبدیل معیارهای کیفی به معیارهای کمی

معیارهای مثبت خاصیت سود دارند و معیارهای منفی جنبه هزینه را دارند. همچنین تبدیل معیارهای کیفی به کمی از طریق تبدیل عبارات کلامی به اعداد متناظر آن صورت می گیرد.

3

تعیین مقدار ایدآل فرضی

مقدار ایده آل برای معیارهای مثبت برابر بیشترین مقدار و برای معیارهای منفی برابر کمترین مقدار.

$$x_{0j} = \max_i x_{ij}\ ,\forall j \in B \qquad x_{0j} = \min_i x_{ij}\ ,\forall j \in C$$

Sanaye20.ir

4

تبدیل معیارهای منفی به مثبت

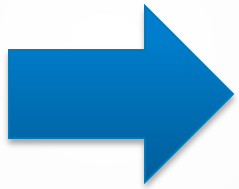
برای این کار کافی است معیارهای منفی را معکوس نماییم.

Sanaye20.ir

خیلی کم= ۱، کم= ۳، متوسط= ۵، زیاد=۷

گام اول و دوم

	منفی	مثبت	منفی	مثبت
	0.404	0.38	0.097	0.119
	C1	C2	C3	C4
A1	20	زیاد	2	کم
A2	10	متوسط	1	متوسط
A3	10	کم	2	زیاد
A4	15	متوسط	3	زیاد
A5	30	زیاد	4	زیاد



	منفی	مثبت	منفی	مثبت
	0.404	0.38	0.097	0.119
	C1	C2	C3	C4
A1	20	7	2	3
A2	10	5	1	5
A3	10	3	2	7
A4	15	5	3	7
A5	30	7	4	7

تبدیل معیارهای کیفی به کمی

Sanaye20.ir

گام سوم
تعیین مقدار
ایدآل فرضی

	منفی	مثبت	منفی	مثبت
	0.404	0.38	0.097	0.119
	C1	C2	C3	C4
A0	10	7	1	7
A1	20	7	2	3
A2	10	5	1	5
A3	10	3	2	7
A4	15	5	3	7
A5	30	7	4	7

$$\frac{1}{x_{ij}} \; ; \; \forall \, C$$

	منفی	مثبت	منفی	مثبت
	0.404	0.38	0.097	0.119
	C1	C2	C3	C4
A0	0.1	7	1	7
A1	0.05	7	0.5	3
A2	0.1	5	1	5
A3	0.1	3	0.5	7
A4	0.066667	5	0.333333	7
A5	0.033333	7	0.25	7
مجموع	0.45	34	3.583333	36

گام چهارم
تبدیل معیارهای
منفی به مثبت

Sanaye20.ir

گام‌های روش ARAS

گام ۸

محاسبه درجه مطلوبیت هر گزینه

$k_i = \frac{S_i}{S_0}$ j= 0, 1,…, m

گام ۷

محاسبه میزان مطلوبیت هر گزینه

کافیست اعداد نرمال شده وزین را به صورت سطری با هم جمع کنیم. بزرگترین مقدار S_i بهترین است، و کمترین آن بدترین.

$S_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ j= 0, 1,…, m

گام ۶

وزن‌دار کردن ماتریس تصمیم

کافیست وزن معیارهایی که از روش آنتروپی یا AHP بدست آمده‌اند در معیارهای نرمال شده ضرب شوند تا ماتریس وزن‌دار حاصل شود.

گام ۵

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} x_{ij}}, \quad \forall j \in B$$

تشکیل ماتریس نرمال

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1/x_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} 1/x_{ij}}, \quad \forall j \in C$$

نکته: فرمول پایینی برای قبل از تبدیل معیار منفی به مثبت می‌باشد.

Sanaye20.ir

گام پنجم
تشکیل ماتریس
نرمال

	0.404	0.38	0.097	0.119
	C1	C2	C3	C4
A0	0.222222	0.205882	0.27907	0.194444
A1	0.111111	0.205882	0.139535	0.083333
A2	0.222222	0.147059	0.27907	0.138889
A3	0.222222	0.088235	0.139535	0.194444
A4	0.148148	0.147059	0.093023	0.194444
A5	0.074074	0.205882	0.069767	0.194444

$$W_{ij} \times x_{ij} \; ; \forall \, C_i$$

	C1	C2	C3	C4
A0	0.089778	0.078235	0.02707	0.023139
A1	0.044889	0.078235	0.013535	0.009917
A2	0.089778	0.055882	0.02707	0.016528
A3	0.089778	0.033529	0.013535	0.023139
A4	0.059852	0.055882	0.009023	0.023139
A5	0.029926	0.078235	0.006767	0.023139

گام ششم
وزن دار کردن
ماتریس نرمال

Sanaye20.ir

گام هفتم
میزان مطلوبیت هر گزینه (Si)

s0	0.218222
s1	0.146576
s2	0.189258
s3	0.159981
s4	0.147896
s5	0.138068

$$k_i = \frac{S_i}{S_0}$$
$$j = 0, 1, \ldots, m$$

		رتبه هر گزینه
k1	0.671683	4
k2	0.867272	1
k3	0.733112	2
k4	0.677734	3
k5	0.632694	5

گام هشتم
درجه مطلوبیت هر گزینه و محاسبه رتبه نهایی

Sanaye20.ir

مثال عددی: روش ARAS در محیط فازی (Z- ARAS)

Sanaye20.ir

Z-ARAS (Adalı & Tuş, 2023)

Step 1: Define the decision matrix (X^k) including performances of alternatives with respect to each criterion in terms of Z-numbers for kth decision maker,

$$X^k(\tilde{A},\ \tilde{B}) = \left[x_{ij}^k\ (\tilde{A},\tilde{B})\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} x_{11}^k\ (\tilde{A},\ \tilde{B}) & \cdots & x_{1n}^k\ (\tilde{A},\ \tilde{B}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^k\ (\tilde{A},\ \tilde{B}) & \cdots & x_{mn}^k\ (\tilde{A},\ \tilde{B}) \end{bmatrix} (i = 1, 2 \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, K) \quad (12)$$

Step 2: Aggregate different decision matrices to continue the Z-ARAS method, and obtain the aggregated decision matrix X shown in Equation (13).

In this study, geometric means of the elements of the k decision matrices are computed during aggregation process.[64]

$$X = \left[x_{ij}\ (\tilde{A},\tilde{B})\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} x_{11}\ (\tilde{A},\tilde{B}) & \cdots & x_{1n}\ (\tilde{A},\tilde{B}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}\ (\tilde{A},\tilde{B}) & \cdots & x_{mn}\ (\tilde{A},\tilde{B}) \end{bmatrix} (i = 1, 2 \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

Step 3: Convert Z-numbers to fuzzy numbers by using Equations (9)-(11), and obtain aggregated fuzzy decision matrix shown in Equation (14).

$$\tilde{X} = \left[\tilde{x}_{ij}\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

In all steps after Step 3, needed operations are performed for fuzzy ARAS method.[32]

Step 4. Compute the optimal performance ($\tilde{x}_{0j}$) of the optimal alternative for each criterion, and add this value to the decision matrix.

$\tilde{x}_{0j}$ is determined by the decision maker but if $\tilde{x}_{0j}$ cannot be determined by the decision maker or its value is not clear, one way can be considering the type of the criteria. Then, it is $\tilde{x}_{ij}$ for the benefit criteria, and $\tilde{x}_{ij}$ for the cost criteria.

Z-ARAS (Adalı & Tuş, 2023)

Step 5: Normalize the fuzzy decision matrix by considering the type of the criteria, and obtain normalized fuzzy decision matrix as follows:

$$\tilde{N} = [\tilde{n}_{ij}]_{mxn} \quad i = 0, 1, \ldots, m \text{ and } j = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

$$\tilde{n}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} \tilde{x}_{ij}} \quad i = 0, 1, \ldots, m \text{ and } j = 1, 2, \ldots, n \tag{15a}$$

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\tilde{x}_{ij}}; \quad \tilde{n}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} \tilde{x}_{ij}} \quad i = 0, 1, \ldots, m \text{ and } j = 1, 2, \ldots, n \tag{15b}$$

where $\tilde{n}_{ij}$ denotes the normalized fuzzy performance values. Equations (15a) and (15b) are used for the benefit and cost criteria, respectively.

Step 6: Obtain weighted fuzzy decision matrix, $\tilde{D}$

$$\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{01} & \cdots & \tilde{d}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}_{m1} & \cdots & \tilde{d}_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \quad (i = 0, 1, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

$$\tilde{d}_{ij} = \tilde{n}_{ij} * \tilde{w}_j \tag{17}$$

where $\tilde{w}_j$ is the fuzzy weight of jth criterion. Any weighting method can be used for finding fuzzy weights of criteria.

Step 7: Calculate the overall fuzzy performance value of each alternative ($\tilde{S}_i$) by using Equation (18)

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_{ij} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m) \tag{18}$$

Step 8: Calculate the fuzzy utility degree (U_i) for each alternative as follows:

$$\tilde{U}_i = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{S}_0} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{19}$$

where $\tilde{S}_0$ is the overall fuzzy performance value of the optimal alternative.

Step 9: Convert the fuzzy utility degrees of alternatives to the crisp utility degrees for the ranking purpose.

This conversion is performed by Equation (8). The alternative with the highest crisp utility degree is considered as the best alternative among all others.[32]

Sanaye20.ir

Z-ARAS (Adalı & Tuş, 2023)

متغیرهای زبانی برای تابع محدودیت (مؤلفه اول عدد z)

متغیرهای زبانی برای تابع قابلیت اطمینان (مؤلفه دوم عدد z)

For restriction part[75]		For reliability part [60]	
Linguistic assessments	Triangular fuzzy number	Linguistic assessments	Triangular fuzzy number
Very Low (VL)	(1, 1, 3)	Not Sure (NS)	(0, 0, 1)
Low (L)	(1, 3, 5)	Not Very Sure (NVS)	(1, 3, 5)
Medium (M)	(3, 5, 7)	Sure (S)	(5, 7, 9)
High (H)	(5, 7, 9)	Very Sure (VS)	(9, 10, 10)
Very High (VH)	(7, 9, 9)		

Sanaye20.ir

مرحله اول: تعیین معیارها و گزینه‌های تصمیم

معیارها (عوامل ریسک فرآیند اکستروژن پرکردن در تولید این کابل)

- فرکانس وقوع خرابی (O)
- شدت داخلی خرابی برای مشتری داخلی (IS)
- شدت خارجی خرابی برای مشتری خارجی (ES)
- عدم قابل تشخیص بودن خرابی (D)

گزینه‌ها

- **F7:** خرابی کلکتورها و ترانسدیوسرها
- **F8:** خرابی دستگاه رنگ‌آمیزی
- **F9:** وجود شکاف در سطح پرکننده
- **F10:** انتخاب پلاستیک غیرمطابق برای محصول
- **F11:** عدم کنترل زمان‌بندی اولیه

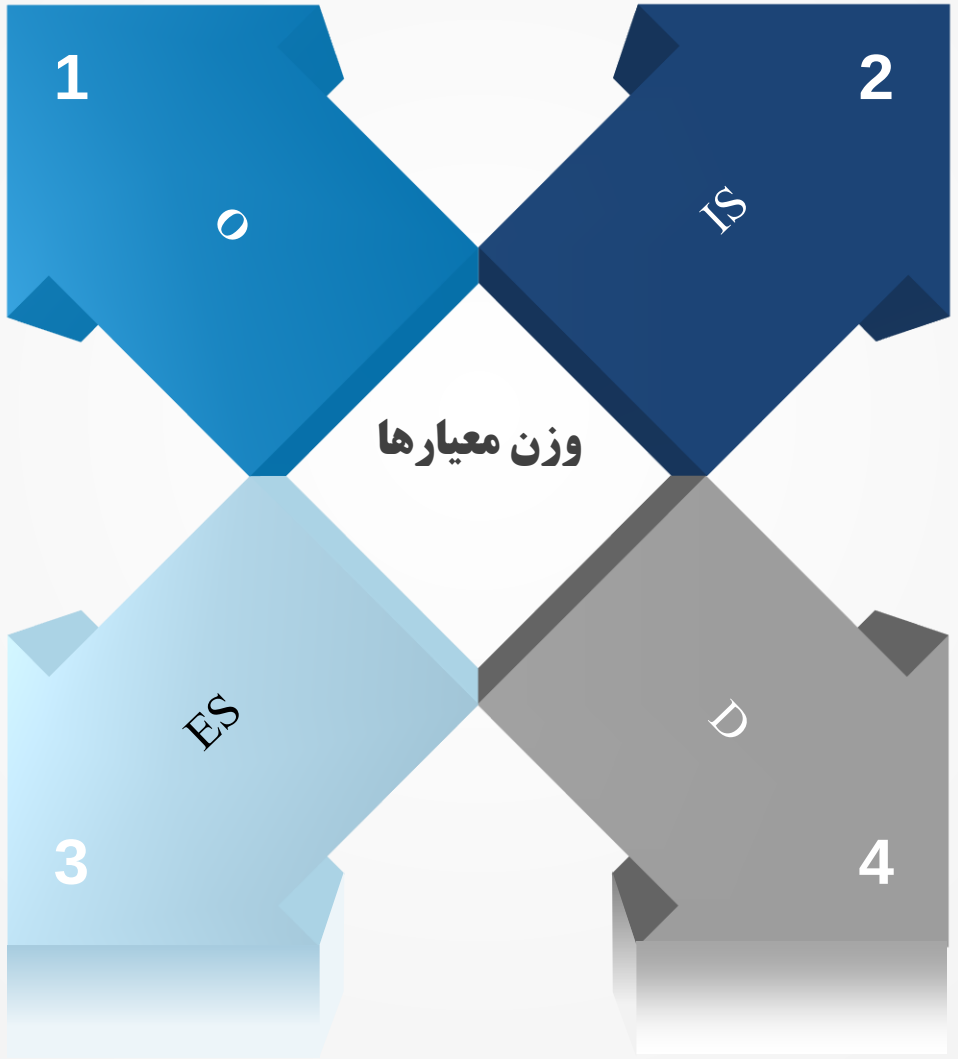
گزینه‌ها

- **F1:** تعریف‌های مهندسی نادرست در فرم سفارش کار
- **F2:** مقادیر تنظیم شده نادرست در فرم‌های تولید
- **F3:** عدم توجه اپراتور به توضیحات هشدار دهنده در کارت‌های نیمه‌کاره قبلی
- **F4:** انتخاب تجهیزات غیرمطابق توسط اپراتور
- **F5:** نگهداری ناکافی تجهیزات
- **F6:** خرابی مقاومت‌های ماشین‌آلات

Sanaye20.ir

مرحله دوم: تعیین وزن معیارها با یکی از روش‌هایی چون BWM، AHP، **آنتروپی شانون**، FUCOM،...

(0.12, 0.18, 0.30)



(0.19, 0.30, 0.46).

(0.24, 0.36, 0.54).

(0.10, 0.16, 0.25).

Sanaye20.ir

مرحله سوم: تشکیل ماتریس تصمیم

تشکیل ماتریس تصمیم برمبنای نظر ۴ خبره با استفاده از متغیرهای زبانی

TABLE 5 Linguistic assessment of decision committee.

	DM_1				DM_2				DM_3				DM_4			
	O	IS	ES	D	O	IS	ES	D	O	IS	ES	D	O	IS	ES	D
FM_1	(L,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(H,VS)	(H,VS)	(M,VS)	(M,S)	(M,S)	(H,S)	(L,S)	(L,NVS)	(M,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)
FM_2	(L,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(M,VS)	(L,VS)	(M,VS)	(L,S)	(M,S)	(L,S)	(L,S)	(M,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)	(L,NVS)
FM_3	(L,NVS)	(VH,NVS)	(H,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(H,VS)	(H,VS)	(M,VS)	(M,S)	(H,S)	(L,S)	(M,S)	(L,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)
FM_4	(M,NVS)	(VH,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(M,VS)	(M,VS)	(L,VS)	(L,S)	(M,S)	(M,S)	(L,S)	(M,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)
FM_5	(L,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(H,VS)	(H,VS)	(M,VS)	(L,S)	(M,S)	(M,S)	(L,S)	(L,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)
FM_6	(L,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(M,VS)	(M,VS)	(M,VS)	(L,S)	(M,S)	(M,S)	(L,S)	(M,NVS)	(M,NVS)	(M,NVS)	(M,NVS)
FM_7	(L,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(M,VS)	(M,VS)	(L,VS)	(M,S)	(M,S)	(L,S)	(VL,S)	(M,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)	(VL,NVS)
FM_8	(L,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)	(M,VS)	(M,VS)	(M,VS)	(L,VS)	(M,S)	(M,S)	(L,S)	(VL,S)	(L,NVS)	(M,NVS)	(M,NVS)	(L,NVS)
FM_9	(M,NVS)	(VH,NVS)	(VH,NVS)	(VL,NVS)	(M,VS)	(H,VS)	(H,VS)	(M,VS)	(M,S)	(M,S)	(H,S)	(L,S)	(M,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(L,NVS)
FM_{10}	(L,NVS)	(VH,NVS)	(H,NVS)	(L,NVS)	(L,VS)	(H,VS)	(H,VS)	(L,VS)	(L,S)	(H,S)	(M,S)	(M,S)	(L,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)
FM_{11}	(L,NVS)	(H, NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)	(M,VS)	(H,VS)	(H,VS)	(L,VS)	(M,S)	(M,S)	(H,S)	(M,S)	(M,NVS)	(H,NVS)	(H,NVS)	(M,NVS)

Sanaye20.ir

مرحله چهارم: تشکیل ماتریس تصمیم

تبدیل متغیرهای زبانی به اعداد برای دو تابع محدودیت و قابلیت اطمینان

TABLE 6 Aggregated decision matrix with Z-numbers.

	O	IS	ES	D
FM_1	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.87, 5.92, 7.94), (2.59, 5.01, 6.89))	((5.00, 7.00, 9.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_2	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.41, 5.44, 7.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.50, 3.71, 5.79), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.32, 3.41, 5.44), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_3	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))	((5.44, 7.45, 9.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.34, 5.66, 7.77), (2.59, 5.01, 6.89))	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_4	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))	((4.21, 6.30, 7.94), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.00, 5.00, 7.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.00, 3.00, 5.00), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_5	((1.32, 3.41, 5.44), (2.59, 5.01, 6.89))	((4.40, 6.44, 8.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((4.40, 6.44, 8.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_6	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.41, 5.44, 7.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.00, 5.00, 7.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_7	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.87, 5.92, 7.94), (2.59, 5.01, 6.89))	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.00, 1.73, 3.87), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_8	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))	((3.41, 5.44, 7.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.00, 2.28, 4.40), ((2.59, 5.01, 6.89))
FM_9	((3.00, 5.00, 7.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((4.79, 6.85, 8.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((5.44, 7.45, 9.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.32, 2.59, 4.79), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_{10}	((1.00, 3.00, 5.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((5.44, 7.45, 9.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((4.40, 6.44, 8.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((1.73, 3.87, 5.92), (2.59, 5.01, 6.89))
FM_{11}	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))	((4.40, 6.44, 8.45), (2.59, 5.01, 6.89))	((5.00, 7.00, 9.00), (2.59, 5.01, 6.89))	((2.28, 4.40, 6.44), (2.59, 5.01, 6.89))

Sanaye20.ir

مرحله پنجم: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری تجمعی با اعداد فازی مثلثی

$$\alpha = \frac{\int x\,\mu_{\tilde{R}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x)dx}$$

اضافه کردن مقدار ایده‌آل

بدست آوردن مقدار محدودیت وزنی ($\tilde{Z}^{a}$) و تبدیل آن به اعداد فازی معمولی ($\tilde{Z}'$)

Aggregated decision matrix with triangular fuzzy numbers.

	O	IS	ES	D
optimal	(2.22, 2.22, 2.22)	(7.56, 7.56, 7.56)	(3.32, 3.32, 3.32)	(2.22, 2.22, 2.22)
FM_1	(3.84, 8.59, 13.12)	(8.59, 13.12, 17.60)	(11.09, 15.53, 19.96)	(3.84, 8.59, 13.12)
FM_2	(3.84, 8.59, 13.12)	(7.56, 12.06, 16.53)	(3.32, 8.22, 12.85)	(2.92, 7.56, 12.06)
FM_3	(3.84, 8.59, 13.12)	(12.06, 16.53, 19.96)	(7.42, 12.56, 17.23)	(5.06, 9.76, 14.27)
FM_4	(5.06, 9.76, 14.27)	(9.34, 13.97, 17.60)	(6.65, 11.09, 15.53)	(2.22, 6.65, 11.09)
FM_5	(2.92, 7.56, 12.06)	(9.76, 14.27, 18.75)	(9.76, 14.27, 18.75)	(3.84, 8.59, 13.12)
FM_6	(3.84, 8.59, 13.12)	(7.56, 12.06, 16.53)	(6.65, 11.09, 15.53)	(3.84, 8.59, 13.12)
FM_7	(5.06, 9.76, 14.27)	(8.59, 13.12, 17.06)	(5.06, 9.76, 14.27)	(2.22, 3.84, 8.59)
FM_8	(3.84, 8.59, 13.12)	(7.56, 12.06, 16.53)	(5.06, 9.76, 14.27)	(2.22, 5.06, 9.76)
FM_9	(6.65, 11.09, 15.53)	(10.62, 15.20, 18.75)	(12.06, 16.53, 19.96)	(2.92, 5.74, 10.62)
FM_{10}	(2.22, 6.65, 11.09)	(12.06, 16.53, 19.96)	(9.76, 14.27, 18.75)	(3.84, 8.59, 13.12)
FM_{11}	(5.06, 9.76, 14.27)	(9.76, 14.27, 18.75)	(11.0, 15.53, 19.96)	(5.06, 9.76, 14.27)

نکته: همه معیارها ماهیت هزینه دارند و معیار منفی در نظر گرفته می‌شوند.

Sanaye20.ir

مرحله ششم: وزن‌دار کردن ماتریس تصمیم

نکته: قبل از ضرب وزن معیارها در اعداد فازی هر گزینه، باید ماتریس نرمال بدست آید.
برای ماتریس نرمال، ابتدا جمع ستونی حدهای بالا، متوسط و پایین را بدست آورده، سپس عدد حد پایین را بر جمع ستونی حد بالا، حد متوسط را بر جمع ستونی حد متوسط و حد بالا را بر جمع ستونی حد پایین تقسیم کرد. در هر گزینه و نسبت به هر معیار اینکار باید انجام شود.

وزن معیارها در اعداد داخل هر سلول ضرب می‌شوند.

TABLE 8 Weighted fuzzy decision matrix.

	O	IS	ES	D
optimal	(0.02, 0.05, 0.11)	(0.02, 0.04, 0.08)	(0.04, 0.09, 0.17)	(0.01, 0.04, 0.08)
FM_1	(0.00, 0.01, 0.06)	(0.01, 0.02, 0.07)	(0.01, 0.02, 0.05)	(0.00, 0.01, 0.05)
FM_2	(0.00, 0.01, 0.06)	(0.01, 0.03, 0.08)	(0.01, 0.04, 0.17)	(0.00, 0.01, 0.06)
FM_3	(0.00, 0.01, 0.06)	(0.01, 0.02, 0.05)	(0.01, 0.02, 0.08)	(0.00, 0.01, 0.04)
FM_4	(0.00, 0.01, 0.05)	(0.01, 0.02, 0.07)	(0.01, 0.03, 0.08)	(0.00, 0.01, 0.08)
FM_5	(0.00, 0.01, 0.08)	(0.01, 0.02, 0.06)	(0.01, 0.02, 0.06)	(0.00, 0.01, 0.05)
FM_6	(0.00, 0.01, 0.06)	(0.01, 0.03, 0.08)	(0.01, 0.03, 0.08)	(0.00, 0.01, 0.05)
FM_7	(0.00, 0.01, 0.05)	(0,01, 0,02, 0,07)	(0.01, 0.03, 0.11)	(0.00, 0.02, 0.08)
FM_8	(0.00, 0.01, 0.06)	(0.01, 0.03, 0.08)	(0.01, 0.03, 0.11)	(0.00, 0.02, 0.08)
FM_9	(0.00, 0.01, 0,04)	(0.01, 0.02, 0.06)	(0.01, 0.02, 0.05)	(0.00, 0.01, 0.06)
FM_{10}	(0.00, 0.02, 0.11)	(0.01, 0.02, 0.05)	(0.01, 0.02, 0.06)	(0.00, 0.01, 0,05)
FM_{11}	(0.00, 0.01, 0.05)	(0.01, 0.02, 0.06)	(0.01, 0.02, 0.05)	(0.00, 0.01, 0.04)

نکته: همه معیارها ماهیت هزینه دارند و معیار منفی در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین باید به معیرا مثبت تبدیل شوند قبل از نرمالسازی. برای اینکار باید تمام اعداد معکوس شوند (عدد ۱ را بر تمامی اعداد تقسیم میکنیم.)

Sanaye20.ir

مرحله هفتم: بدست آوردن میزان مطلوبیت (S_i) و درجه مطلوبیت (U_i) هر گزینه

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_{ij} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

$$\tilde{U}_i = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{S}_0} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\frac{a1 + 4 \times a2 + a3}{6}$$

وزن قطعی را برای مطلوبت کل بدست می‌آوریم.

TABLE 9 Overall performances, utility degrees, and crisp scores for all failure modes

	Overall performance	Utility degree	Crisp utility degree
optimal	(0.08, 0.21, 0.44)		
FM_1	(0.02, 0.06, 0.23)	(0.04, 0.30, 2.72)	0.662
FM_2	(0.02, 0.09, 0.37)	(0.05, 0.40, 4.41)	1.008
FM_3	(0.02, 0.06, 0.22)	(0.04, 0.30, 2.64)	0.643
FM_4	(0.02, 0.07, 0.28)	(0.05, 0.34, 3.28)	0.780
FM_5	(0.02, 0.07, 0.25)	(0.04, 0.31, 2.93)	0.701
FM_6	(0.02, 0.07, 0.27)	(0.05, 0.35, 3.23)	0.779
FM_7	(0.02, 0.09, 0.31)	(0.05, 0.40, 3.66)	0.887
FM_8	(0.02, 0.08, 0.34)	(0.05, 0.40, 3.95)	0.931
FM_9	(0.02, 0.06, 0.20)	(0.04, 0.29, 2.38)	0.597
FM_{10}	(0.02, 0.07, 0.26)	(0.04, 0.30, 3.08)	0.723
FM_{11}	(0.02, 0.06, 0.20)	(0.04, 0.28, 2.31)	0.580

نکته: برای بدست آوردن S_i از جمع سطری استفاده میکنیم، بطوریکه حدهای پایین باهم، حدهای متوسط باهم و حدهای بالا باهم جمع میشوند. برای بدست آوردن U_i حد پایین را بر مقدار حد بالا optimal، حد متوسط را بر مقدار حد متوسط optimal و حد بالا را بر حد پایین optimal تقسیم کنیم. اینکار برای تمام گزینه‌ها انجام می‌گردد.

Sanaye20.ir

منابع

1. Tüysüz, N., & Kahraman, C. (2023). A novel Z-fuzzy AHP&EDAS methodology and its application to wind turbine selection. *Informatica*, 34(4), 847-880.
2. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control.
3. Adalı, E. A., & Tuş, A. (2023). ARAS method based on Z-numbers in FMEA. Quality and Reliability Engineering International, 39(7), 3059-3081.
4. Kang, B., Wei, D., Li, Y., & Deng, Y. (2012). A Method of Converting Z-number to Classical Fuzzy Number. *Journal of Information & Computational Science*, 9(3), 703- 709.
5. Kahraman, C., & Otay, I. (2018). Solar PV power plant location selection using a Z-fuzzy number based AHP. International Journal of the Analytic Hierarchy Process, 10(3).
6. Tan, Y., Chen, Z., Wang, B., Ma, Q., & Wei, J. (2024). A Z-number and MABAC method based on reliability analysis and evaluation of product design concept. Maintenance & Reliability/Eksploatacja i Niezawodność, 26(1).
7. Zafaranlouei, N., Ghoushchi, S. J., & Haseli, G. (2023). Assessment of sustainable waste management alternatives using the extensions of the base criterion method and combined compromise solution based on the fuzzy Z-numbers. Environmental Science and Pollution Research, 30(22), 62121-62136.

Sanaye20.ir