روش فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

روش فرآیند تحلیل سلسله مراتبی(AHP) اولین بار توسط توماس ال ساعتی در سال ۱۹۸۰ ارائه گردید.

این روش بر پایهٔ مقایسات زوجی استوار می باشد.

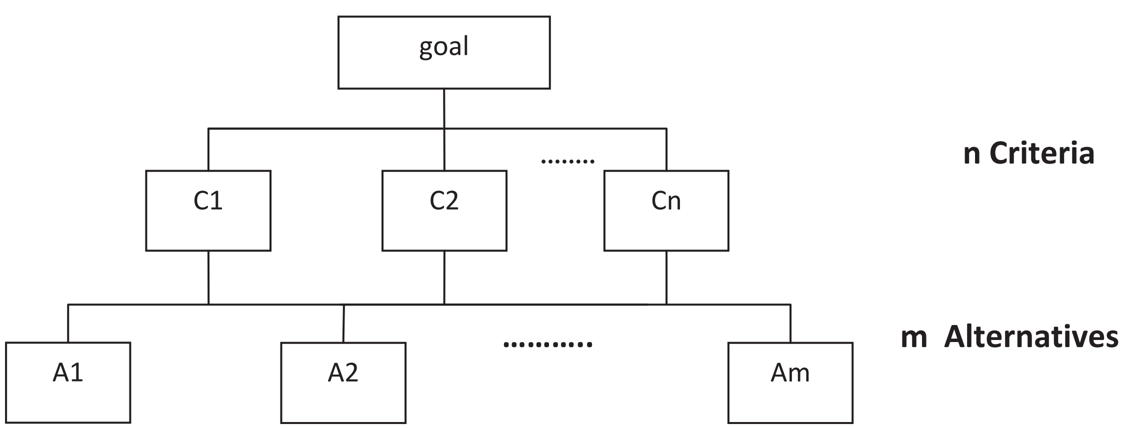
- ✓ مدل سازی با استفاده از این روش شامل گا مهای زیر می باشد:

۱- ساختن یک ساختار سلسله مراتبی برای مساله

۲- تعیین ماتریسهای زوجی و محاسبه وزن معیارها و گزینه ها

۳- بررسی سازگاری سیستم

برای ساختن سطوح سلسله مراتبی باید، سطوح مختلف و مر تبط بین اجزا تشکیل دهند ه هر سطح با سطوح بالاتر و پایین ترمشخص گردد . به طور کلی، سطح اول مربوط به هدف، سطح دوم مربوط به معیارهای مورد نظر برای اولویت بندی گزینه ها و سطح سوم نشان دهنده گزینه های مورد بررسی است .



پس از مشخص شدن ساختار سلسله مراتبی، باید ما تر یس های مقایسه زوجی براساس نظر شخص تصمیم گیرنده تعیین گردد. این عمل، برای اجزای در هر سطح به صورت جداگانه انجام می گیرد. به طور کلی اگر تعداد گزینه ها و معیا رها به ترتیب برابر mو nباشد، آنگاه ماتریسهای مقایسه زوجی گزینه ها به صورت m×m و ماتریس مقایسه زو جی معیار ها یک ماتریس n×n خواهد بود.

اجزای ماتریس مقایسه زوجی با aij نشان داده می شود . در روش AHP فرض می گردد که aij =1/aji می باشد.
بنابراین واضح است در صورتی که i=j باشد آن گاه ۱ =aijخواهد بود.

بنابراین با توجه به خاصیت عکس پذیری تنها به تعداد $\frac{n(n-1)}{2}$ مقایسه دریک ماتریس n×n لازم خواهد بود .

مثال:

پزشکان قصد دارند از بین داروهای B,A و C دارویی را برای درمان اولیه یک بیماری مزمن انتخاب کنند.بدین منظور ۴ شاخص اصلی را در نظر گرفته اند.

- ✓ ۱.ساختن سلسله مراتبی

- ✓ ۲- محاسبه وزن

- **وزن نسبی:** عناصر هر سطح نسبت به عنصرمربوطه خود در سطح بالاتر به صورت زوجی مقایسه شده و وزن آنها محاسبه می گردد.

انواع روشهای محاسبه وزن نسبی:

۱-حداقل مربعات معمولی

۲-حداقل مربعات لگاریتمی

۳-بردار ویژه

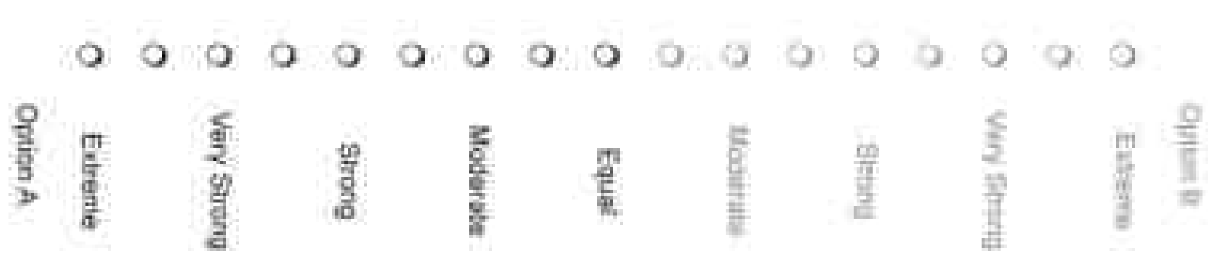
۴-روشهای تقریبی(مجموع سطری – مجموع ستونی - میانگین حسابی – میانگین هندسی)

- **وزن مطلق:** وزن نهایی هر گزینه با تلفیق وزنهای نسبی حاصل می شود.

در مقایسه عنصر **i** با عنصر **j** اهمیت **i** بر **j** یکی از حالات زیر است:

9	Extremely preferred	کاملا مرجح
7	Very strongly preferred	ترجیح خیلی قوی
5	Strongly preferred	ترجیح قوی
3	Moderately preferred	کمی مرجح
1	Equally preferred	ترجیح یکسان
2,4,6,8		ترجیحات بین فواصل

ترجیحات، قضاوت زبانی :



ترجیحات، قضاوت عددی :

- محاسبه وزن نسبی داروها از نظر اثر بخشی (با روش میانگین حسابی)

ماتریس مقایسه زوجی برای ۳ دارو از نظر اثر بخشی بدین صورت است:

معیار اثر بخشی	داروA	داروB	داروC
داروA	۱	۱/۳	۵
داروB	۳	۱	۷
داروC	۱/۵	۱/۷	۱

گام ۱) مقا دیر هر یک از ستون ها را با هم جمع می کنیم .

معیار اثر بخشی	داروA	داروB	داروC
داروA	۱	۱/۳	۵
داروB	۳	۱	۷
داروC	۱/۵	۱/۷	۱
جمع هر ستون	۴,۲	۱,۴۸	۱۳

گام ۲) هر عنصر در ماتریس مقایسه زوجی را به جمع ستون خودش تقسیم می کنیم تا ماتریس مقایسه زوجی نرمالیزه شود.

معیار اثر بخشی	داروA	داروB	داروC
داروA	۱/۴,۲	۱/۴,۴۴	۵/۱۳
داروB	۳/۴,۲	۱/۱,۴۸	۷/۱۳
داروC	۱/۲۱	۱/۱۰,۳۶	۱/۱۳

گام ۳) متوسط عناصر در هر سطر از ماتریس نرمالیزه را حساب می کنیم.

معیار اثر بخشی	داروA	داروB	داروC	متوسط سطر
داروA	۰,۲۳۸	۰,۲۲۵	۰,۳۸۵	۰,۲۸۳
داروB	۰,۷۱۴	۰,۶۷۶	۰,۵۳۸	۰,۶۴۳
داروC	۰,۰۴۸	۰,۰۹۷	۰,۰۷۷	۰,۰۷۴
جمع کل	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰

بردار ارجحیت که ارجحیتهای نسبی دارو B,Aو C را با در نظر گرفتن معیار اثربخشی نشان می دهد بصورت زیر است:

(۰,۲۸۳ , ۰,۶۴۳ , ۰,۰۷۴)

محاسبه سایر وزن های نسبی:

- محاسبه وزن نسبی داروها از نظر عوارض جانبی کمتر

معیار عوارض جانبی کمتر	داروA	داروB	داروC	وزن نسبی
داروA	۱	۵	۰,۵	۰,۳۱۲۵
داروB	۰,۲	۱	۰,۱	۰,۰۶۲۵
داروC	۲	۱۰	۱	۰,۶۲۵۰

بردار ارجحیت به صورت زیر است:

(۰,۳۱۲۵،۰,۰۶۲۵،۰,۶۲۵)

- شاخص هزینه دارو و مصرف کمی بوده ونیازی به مقایسات زوجی ندارند.

به جهت منفی بودن مطلوبیت شاخص ، معکوس آنها محاسبه و سپس به هنجار شده است.

گزینه ها	هزینه دارو	معکوس هزینه	به هنجار معکوس هزینه

داروA	$۵	۰,۲	۰,۷۷
داروB	$۵۰	۰,۰۲	۰,۰۷۷
داروC	$۲۵	۰,۰۴	۰,۱۵۳
جمع		۰,۲۶	۱,۰۰۰

گزینه ها	مصرف روزانه	معکوس مصرف روزانه	به هنجار معکوس مصرف روزانه
داروA	۲ بار	۰,۵	۰,۲
داروB	۱بار	۱	۰,۴
داروC	۱بار	۱	۰,۴
جمع		۲,۵	۱

نتایج محاسبات وزن های نسبی :

معیار / گزینه	عوارض جانبی کمتر	مصرف روزانه	اثر بخشی	هزینه در ماه

داروA	۰,۳۱۲۵	۰,۲	۰,۲۸۳	۰,۷۷
داروB	۰,۰۶۲۵	۰,۴	۰,۶۴۳	۰,۰۷۷
داروC	۰,۶۲۵	۰,۴	۰,۰۷۴	۰,۱۵۳

محاسبه وزن معیارها نسبت به هم :

	عوارض جانبی کمتر	**مصرف روزانه**	**اثر بخشی**	**هزینه در ماه**	**وزن نسبی**
عوارض جانبی کمتر	۱	۶	۱/۳	۴	۰,۳۰
مصرف روزانه	۱/۶	۱	۱/۷	۱/۲	۰,۰۵۸
اثر بخشی	۳	۷	۱	۵	۰,۵۴۷
هزینه در ماه	۱/۴	۲	۱/۵	۱	۰,۱۰

بردار ارجحیت : (۰,۳۰،۰,۰۵۸،۰,۵۴۷،۰,۱۰)

محاسبه وزن نهایی داروها :

$$\text{وزن نهایی هر گزینه} = \sum_{\text{به ازای هر معیار}} \left(\text{وزن آن معیار} \times \text{وزن گزینه نسبت به آن معیار}\right)$$

- وزن نهایی دارو A

0.3125*0.3+0.2*0.058+0.283*0.547+0.77*0.1= 0.337

- وزن نهایی دارو B

0.0625*0.3+0.4*0.058+ 0.643*0.547+0.077*0.1=0.401

- وزن نهایی دارو C

0.625*0.3+0.4*0.058+0.074*0.547+0.153*0.1=0.266

دارو B بهترین انتخاب می باشد.

✓ ۳- سازگاری سیستم

روش محاسبه وزنها از ماتریس تصمیم به سازگار یا ناسازگار بودن ماتریس تصمیم وابسته است. اگر شرط $a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij}$ در ماتریس تصمیم برقرار باشد می گوییم که ماتریس تصمیم سازگار است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 1/8 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad a_{12} \cdot a_{23} = a_{13} \qquad ۸ \times ۱/۴=۲$$

عدم برقراری این رابطه میزانی از ناهمگنی یا ناسازگاری را می رساند، ناسازگاری یک تصمیم مقدار خطا و اشتباه را به ما نشان می دهد.

همواره ماتریس های تصمیم ای که در مقایسه گزینه ها نسبت به یک معیار کمی بدست می آیند دارای این خاصیت هستند. اما در مورد معیارهای کیفی چنین نیست.اگر این خاصیت برقرار نباشد، ماتریس ناسازگار است که معمولآ ما تریس هایی که با معیارهای کیفی و با استفاده از نظرات شفاهی تولید می شوند ناسازگارند. برای هر نوع از ماتریس های تصمیم روش خاصی در محاسبه وزن ها وجوددارد که به تفکیک بیان می کنیم.

- استخراج وزنها از ماتریس سازگار

۱- در این حالت اگر معیار دارای جهت مثبت باشد (زیاد بودن آن مطلوب باشد)مؤلفه های یک ستون دلخواه از آن رانسبت به مجموع آن ستون نرمال می کنیم و وزنها بدست می آید.

۲- ا گر معیار دارای جهت منفی باشد (کم بودن آن مطلوب باشد)مؤلفه های یک سطر دلخواه از آن را نسبت به مجموع آن سطر نرمال می کنیم و وزنها بدست می آید.

- استخراج وزنها از ماتریس نا سازگار

در این حالت از روش قبل نمی توان برای استخراج وزنها استفاده کرد.چهار روش عمده در محاسبه وزنها در حالت ناسازگاری ماتریس تصمیم موجود است که عبارتند از:

۱) روش حداقل مربعات (Least Squares Method)

۲) روش حداقل مربعات لگاریتمی (Logarithmic Least Squares Method)

۳) روش بردار ویژه (Eigenvector Methods)

۴) روشهای تقریبی (Aproximation Methods)

۱) روش حداقل مربعات (Least Squares Method)

فرض کنید ماتریس تصمیم A ناسازگار باشد و می خواهیم وزن هر گزینه را با استفاده از ماتریس A محاسبه کنیم، ماتریس A را بصورت زیر در نظر بگیرید :

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A_1 & . & . & . & A_n \\
\hline
A_1 & 1 & . & . & . & a_{1n} \\
. & . & . & & & \\
. & . & & . & & \\
. & . & & & . & \\
A_n & a_{n1} & & & & 1
\end{array}
$$

a_{ij} ترجیح عنصر i ام نسبت به عنصر j ام.

فرض کنید وزن واقعی گزینه ها (W1,....,Wn) باشد آنگاه ماتریس تصمیم باید بصورت زیر باشد:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A_1 & A_2 & \cdots & \cdots & A_n \\
\hline
A_1 & 1 & W_1/W_2 & \cdots & \cdots & W_1/W_n \\
A_2 & W_2/W_1 & 1 & \cdots & \cdots & W_2/W_n \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \\
A_n & W_n/W_1 & & & & 1
\end{array}
$$

باید Wi را بگونه ای پیدا کنیم که اختلاف مؤلفه های ماتریس فوق با ماتریس تصمیم A به کمترین مقدار ممکن برسد.

برای این کار مدل زیر را باید اجرا کرد :

$$MIN\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-w_i/w_j)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$$

محدودیت موجود در این مدل بیان می کند که وزن ها باید نرمال شده باشند (مجموع وزن ها برابر ۱ باشد) و با استفاده از این قید نرمال ساز می توان مدل فوق را بصورت معادل زیرنوشت :

$$MIN\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}w_j-w_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$$

و بدین ترتیب یک تقریب از وزنها بدست می آید.

برای حل مسأله فوق ،معادله لاگرانژی آن بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}w_j-w_i)^2+2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\right)$$

اگر از معادله فوق نسبت به W مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{il}w_l-w_i)a_{il}-\sum_{j=1}^{n}(a_{lj}w_j-w_l)+\lambda=0\quad l=1,2,\ldots,n$$

با حل معادلات فوق مقدار متغیرهای Wi و λ را می توان بدست آورد.

روش حداقل مربعات معمولی ، میانگین حسابی خطاها را حداقل می کند.

مثال) ماتریس مقایسه زوجی ۳ دارو از نظر اثر بخشی را در نظر بگیرید :

الف) نشان دهید ماتریس مقایسه ناسازگار است.

ب) وزن هر معیار را با روش حداقل مربعات بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

❖ حل الف : اگر رابطه $a_{ik}.a_{kj} = a_{ij}$ *برای* یکی از i,j,k ها برقرار نباشد ماتریس ناسازگار خواهد بود.

$$a_{12}.a_{23} = a_{13} \quad \Longrightarrow \quad 1/3 \times 7 \neq 5$$

❖ حل ب : با جایگذاری اعداد ماتریس داریم :

$$L=1 \rightarrow (1W1-W1)1+(3W1-W2)3+(1/5W1-W3)1/5-(1W1-W1)-(1/3W2-W1)-(5W3-W1)+\lambda=0$$
$$L=2 \rightarrow (1/3W2-W1)1/3+(W2-W2)+(1/7W2-W3)1/7-(3W1-W2)-(W2-W2)-(7W3-W2)+\lambda=0$$
$$L=3 \rightarrow (5W3-W1)5+(7W3-W2)7+(W3-W3)-(1/5W1-W3)-(1/7W2-W3)-(W3-W3)+\lambda=0$$
$$W1+W2+W3=1$$

- حل با نرم افزار LINGO :

Variable	Value
W1	0.2431517
W2	0.6702947
W3	0.8655366E-01
λ	0.000000

Row	Slack or Surplus
1	0.000000
2	0.000000
3	-0.5258700
4	0.000000
5	0.000000

۲)روش حداقل مربعات لگاریتمی (Logarithmic Least Squares Method)

در این روش هدف حداقل کردن میانگین هندسی اختلافات می باشد.

اگر ماتریس مقایسه زوجی A سازگار باشد ⟸ $a_{ij} = W_i / W_j$ یا $W_i = a_{ij} W_j$

اگر ماتریس مقایسه زوجی A ناسازگار باشد ⟸ $a_{ij} \neq W_i / W_j$ یا $W_i \neq a_{ij} W_j$

میانگین هندسی این اختلافات برابر است با:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{W_j}{W_i} \right)^{\frac{1}{n^2}} = Z^{\frac{1}{n^2}}$$

- در حالت سازگاری

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Lna_{ij} - Ln(W_i / W_j) \right) = 0$$

- در حالت ناسازگاری

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Lna_{ij} - Ln(W_i / W_j) \right) = \frac{1}{n^2} LnZ$$

- با حل مدل برنامه ریزی زیر مقادیر Wi بدست خواهند آمد.

$$\min(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln a_{i,j} - \ln(w_i / w_j))^2$$

$ST:$

$$\sum_{i=1}^{n} Wi = 1$$

$Wi \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$

۳) روش بردار ویژه (Eigenvector Methods)

در این روش W_i ها بگونه ای تعیین می شوند که روابط زیر صادق باشد.

$$
\begin{aligned}
&a_{11} W_1 + a_{12} W_2 + \cdots + a_{1n} W_n = \lambda . W_1 \\
&a_{21} W_1 + a_{22} W_2 + \cdots + a_{2n} W_n = \lambda . W_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1} W_1 + a_{n2} W_2 + \cdots + a_{nn} W_n = \lambda . W_n
\end{aligned}
$$

وزن عناصر:

$$W_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} W_j \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

دستگاه معادلات فوق را بصورت زیر می توان نشان داد:

$$A \times W = \lambda . W$$

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ ماتریس مقایسه زوجی

W بردار ویژه و λ مقدار ویژه برای ماتریس A هستند.

- ✓ مراحل محاسبه Wi در روش بردار ویژه:

۱ – ماتریس A را تشکیل دهید.

۲ – ماتریس (A – λ I) را مشخص نمایید.

۳ – دترمینان ماتریس(A – λ I) را محاسبه کرده و آن را مساوی صفر قرار داده و مقادیر λ را بدست آورید .

۴ – بزرگترین λ را $\lambda_{\max}$ بنامید و آنرا در رابطه $(A-\lambda_{\max} I)\times W=0$ قرار داده ومقادیر Wi ها را محاسبه نمایید.

مثال :ماتریس مقایسه زوجی ۳ دارو از نظر اثر بخشی را در نظر بگیرید ،بردار و مقدار ویژه آنرا محاسبه نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/3 & 5 \\ 3 & 1-\lambda & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+274/105=0$$

- حل با نرم افزار LINGO :

Variable	Value
$\lambda_{\max}$	3.064888

$$\begin{bmatrix} -2.064888 & 1/3 & 5 \\ 3 & -2.064888 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & -2.064888 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} W1 \\ W2 \\ W3 \end{bmatrix}=0$$

$$W_1+W_2+W_3=1$$

- حل با نرم افزار LINGO :

Variable	Value
W1	0.2789546

W2 0.6491179

W3 0.7192742E-01

قضیه :

برای یک ماتریس مثبت و معکوس ، همچون ماتریس مقایسه زوجی ، بردار ویژه را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$W = \lim_{k\to\infty} \frac{A^k . e}{e^T . A^k . e}$$

که در آن $e^T = (1,1,\dots,1)$ می باشد.

۱ - $A^k.e$ را محاسبه می نماییم.(k=1)

$$A^k . e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{bmatrix}$$

۲ – حاصل عبارت $e^T .A^k .e$ را بدست می آوریم :

$$e^T .A^k .e = e^T .(A^k .e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

حاصل $\frac{A^k . e}{e^T . A^k . e}$ عبارت است از اینکه ماتریس A را به توان K برسانیم آنگاه سطرها را با هم جمع کرده تا یک بردار ستونی به دست آید ودر نهایت بردار حاصل را نرمالیزه نماییم.

با افزایش مقادیر k مقدارw ها به یک مقدار ثابت نزدیک می گردد و محاسبات متوقف می شود.

مثال : ماتریس مقایسه زوجی اثر بخشی ۳ دارو را در نظر بگیرید ، با استفاده از قضیه فوق وزن عناصر را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار اول :

بردار حاصل از جمع سطری ماتریس A = $\begin{bmatrix} 6.33 \\ 11 \\ 1.34 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Normalize}} W^1 = \begin{bmatrix} 0.339 \\ 0.589 \\ 0.0717 \end{bmatrix}$

- حل با نرم افزار مطلب :

تکرار دوم :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3.0000 & 1.3810 & 12.3333 \\ 7.4000 & 3.0000 & 29.0000 \\ 0.8286 & 0.3524 & 3.0000 \end{bmatrix} \xrightarrow{Normalize} W^2 = \begin{bmatrix} 0.2772 \\ 0.6535 \\ 0.0693 \end{bmatrix}$$

تکرار سوم :

$$A^3 = \begin{bmatrix} 9.6095 & 4.1429 & 37.0000 \\ 22.2000 & 9.6095 & 87.0000 \\ 2.4857 & 1.0571 & 9.6095 \end{bmatrix} \xrightarrow{Normalize} \mathrm{W}^3 = \begin{bmatrix} 0.2778 \\ 0.6502 \\ 0.0720 \end{bmatrix}$$

تکرار چهارم :

$$A^4 = \begin{bmatrix} 29.4381 & 12.6317 & 114.0476 \\ 68.4286 & 29.4381 & 265.2667 \\ 7.5790 & 3.2585 & 29.4381 \end{bmatrix} \xrightarrow{Normalize} W^4 = \begin{bmatrix} 0.2790 \\ 0.6490 \\ 0.0720 \end{bmatrix}$$

تکرار پنجم :

$$A^5 = \begin{bmatrix} 90.1429 & 38.7370 & 349.6603 \\ 209.7962 & 90.1429 & 813.4762 \\ 23.2422 & 9.9903 & 90.1429 \end{bmatrix} \xrightarrow{Normalize} W^5 = \begin{bmatrix} 0.2790 \\ 0.6491 \\ 0.0719 \end{bmatrix}$$

تکرار ششم :

$$A^6 = \begin{bmatrix} 1.0e+003\ * & & \\ 0.2763 & 0.1187 & 1.0715 \\ 0.6429 & 0.2763 & 2.4935 \\ 0.0712 & 0.0306 & 0.2763 \end{bmatrix} \xrightarrow{Normalize} W^6 = \begin{bmatrix} 0.2790 \\ 0.6491 \\ 0.0719 \end{bmatrix}$$

۴)روشهای تقریبی (Aproximation Methods)

- ۴-۱) مجموع سطری

ابتدا مجموع عناصر هر سطر محاسبه شده تا یک بردار ستونی حاصل گردد سپس این بردار ستونی نرمالیزه میشود.

مثال : ماتریس مقایسه زوجی معیارهای ۳ دارو را در نظر گیرید، بردار وزن آنرا با روش مجموع سطری بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1/3 & 4\\ 1/6 & 1 & 1/7 & 1/2\\ 3 & 7 & 1 & 5\\ 1/4 & 2 & 1/5 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{Sum\ \ Of\ \ Rows}\begin{bmatrix}11.33\\ 1.81\\ 16\\ 3.45\end{bmatrix}\xrightarrow{Normalize}W=\begin{bmatrix}0.3477\\ 0.0556\\ 0.4909\\ 0.1059\end{bmatrix}$$

- ۲-۴) مجموع ستونی

ابتدا مجموع عناصر هر ستون محاسبه شده تا یک بردار سطری حاصل گردد، عناصر این بردار معکوس گشته، سپس بردار حاصل نرمالیزه می شود.

مثال : ماتریس مقایسه زوجی معیارهای ۳ دارو را در نظر بگیرید، بردار وزن آنرا با روش مجموع ستونی بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1/3 & 4\\ 1/6 & 1 & 1/7 & 1/2\\ 3 & 7 & 1 & 5\\ 1/4 & 2 & 1/5 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{Sum Of\ Columns}\begin{bmatrix}4.417 & 16 & 1.676 & 10.5\end{bmatrix}\xrightarrow{Invert}\begin{bmatrix}0.226 & 0.0625 & 0.597 & 0.095\end{bmatrix}\xrightarrow{Normalize}W=\begin{bmatrix}0.2304 & 0.0637 & 0.6089 & 0.1560\end{bmatrix}$$

- ۳-۴) میانگین حسابی

ابتدا هر ستون نرمالیزه شده سپس میانگین سطری عناصر محاسبه می شوند تا بردار وزن بدست آید.

مثال : ماتریس مقایسه زوجی معیارهای ۳ دارو را در نظر گیرید، بردار وزن آنرا با روش میانگین حسابی بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1/3 & 4\\ 1/6 & 1 & 1/7 & 1/2\\ 3 & 7 & 1 & 5\\ 1/4 & 2 & 1/5 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{Normalized\ \text{columns}}\begin{bmatrix}0.2264 & 0.3750 & 0.1989 & 0.3810\\ 0.0377 & 0.0625 & 0.0852 & 0.0476\\ 0.6792 & 0.4375 & 0.5967 & 0.4762\\ 0.0566 & 0.125 & 0.1193 & 0.0952\end{bmatrix}\xrightarrow{Average\ \text{of Rows}}W=\begin{bmatrix}0.2953\\ 0.0583\\ 0.5474\\ 0.0991\end{bmatrix}$$

- ۴-۴)میانگین هندسی

میانگین هندسی عناصر هر سطر محاسبه شده و سپس بردار حاصل نرمالیزه می شود.

مثال : ماتریس مقایسه زوجی معیارهای ۳ دارو را در نظر گیرید، بردار وزن آنرا با روش میانگین هندسی بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1/3 & 4 \\ 1/6 & 1 & 1/7 & 1/2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \\ 1/4 & 2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{1\times 6\times 1/3\times 4}=1.6776 \\ \sqrt[4]{1/6\times 1\times 1/7\times 1/2}=0.3303 \\ \sqrt[4]{3\times 7\times 1\times 5}=3.2011 \\ \sqrt[4]{1/4\times 2\times 1/5\times 1}=0.5623 \end{bmatrix} \xrightarrow{Normalize} W=\begin{bmatrix} 0.2907 \\ 0.0572 \\ 0.5547 \\ 0.0974 \end{bmatrix}$$

محاسبه نرخ ناسازگاری

- ✓ خصوصیات ماتریس سازگار:

۱- مقدار وزن عناصر برابر مقدار نرمالیزه هر ستون می باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 0.1 \\ 2 & 10 & 1 \\ \hline 3.2 & 16 & 1.6 \end{bmatrix} \rightarrow W=\begin{bmatrix} 1\div 3.2=0.3125 \\ 0.2\div 3.2=0.0625 \\ 2\div 3.2=0.6250 \end{bmatrix} \xrightarrow{or} W=\begin{bmatrix} 5\div 16=0.3125 \\ 1\div 16=0.0625 \\ 10\div 16=0.6250 \end{bmatrix}$$

۲ – مقدار ویژه برابر طول ماتریس است (A×W= n.W).

$$A\times W=\lambda .\mathrm{W}$$

طبق تعریف داریم:

$$A\times W=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 0.1 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.0625 \\ 0.6250 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9375 \\ 0.1875 \\ 1.8750 \end{bmatrix}$$

$$A\times W=\begin{bmatrix} 0.9375 \\ 0.1875 \\ 1.8750 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.0625 \\ 0.6250 \end{bmatrix}=3W$$

$$n=3$$
$$A\times W=3W\rightarrow n=\lambda$$

۳ – مقدار ناسازگاری در این ماتریس صفر است.

- **خصوصیات ماتریس ناسازگار:**

قضیه ۱) اگر $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مقایسه زوجی A باشد، مجموع مقادیر آنهابرابر n است .

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

قضیه ۲) بزرگترین مقدار ویژه $\lambda_{\max}$ همواره بزرگتر یا مساوی n است (در این صورت برخی از λ ها منفی خواهند بود).

$$\lambda_{\max} \geq n$$

قضیه ۳) اگر عناصر ماتریس مقدار کمی از حالت سازگاری فاصله بگیرد ، مقدار ویژه آن نیز مقدار کمی از حالت سازگاری خود فاصله خواهد گرفت .

برای هر ماتریس مربعی A داریم :

$$A \times W = \lambda . W$$

- در حالتیکه ماتریس A سازگار باشد یک مقدار ویژه - λ - برابر n بوده (بزرگترین مقدار ویژه) و بقیه آنها برابر صفر هستند .

$$A \times W = n . W$$

- در حالتیکه ماتریس مقایسه زوجی A ناسازگار باشد طبق قضیه ۳ ، $\lambda_{\max}$ کمی از n فاصله می گیرد .

$$A \times W = \lambda_{\max} . W$$

- مقدار ناسازگاری (.I.I) از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$I.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

- نرخ ناسازگاری از فرمول زیر بدست می آید :

$$I.R. = \frac{I.I.}{I.I.R}$$

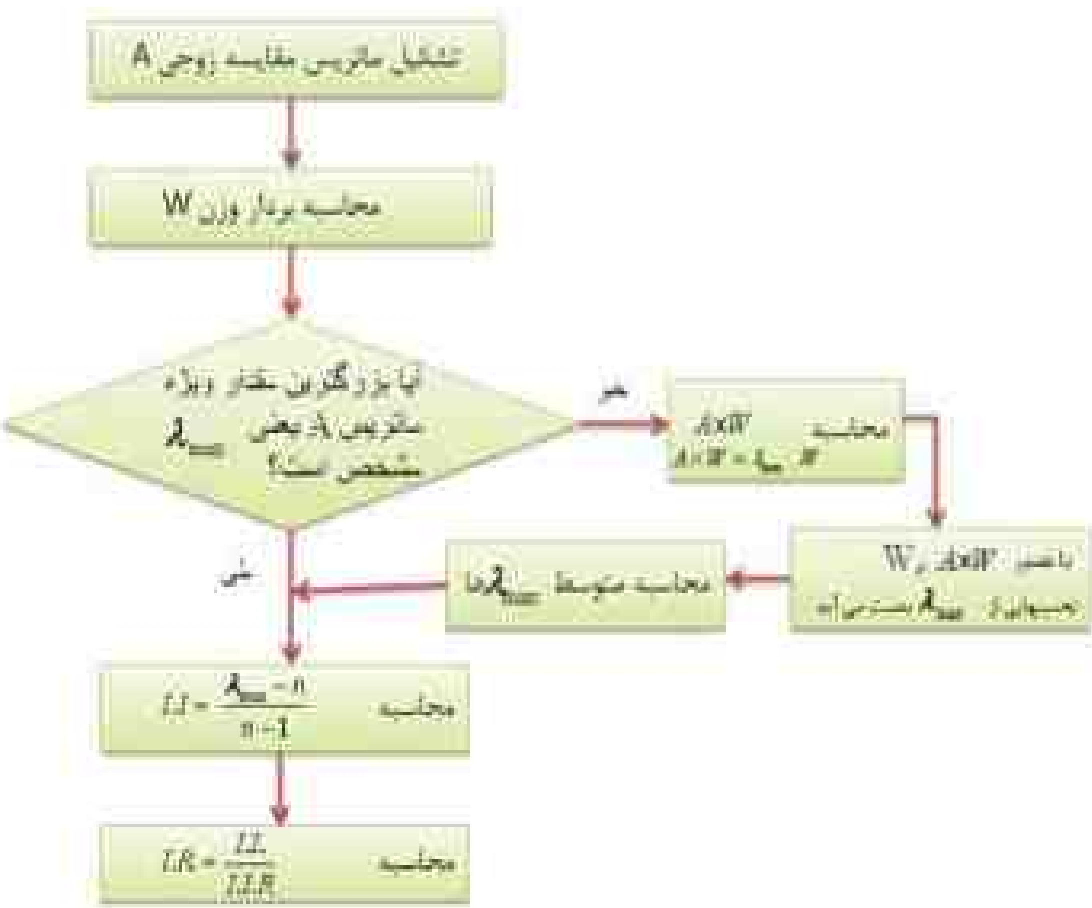
در صورتیکه $I.R. \leq 0.1$ باشد سازگاری سیستم قابل قبول است

وگرنه باید در قضاوتها تجدید نظر نمود.

شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی(I.I.R.)بسته به ابعاد ماتریس که n فرض شده است مطابق جدول زیر قابل استخراج است :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I.I.R.	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	**1.59**

فلوچارت محاسبه نرخ ناسازگاری یک ماتریس :



مثال : برای ماتریس مقایسه زوجی زیر نرخ ناسازگاری را محاسبه کنید (W را به روش میانگین حسابی تخمین بزنید).

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/5 & 1/4 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\textit{Normalized}\ \text{columns}}\begin{bmatrix}0.588 & 0.615 & 0.5\\ 0.294 & 0.308 & 0.4\\ 0.118 & 0.077 & 0.1\end{bmatrix}\xrightarrow{\textit{Average}\ \text{of Rows}} W=\begin{bmatrix}0.568\\ 0.334\\ 0.098\end{bmatrix}$$

$$A.\mathrm{W}=\lambda_{\max}.\mathrm{W}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/5 & 1/4 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.568\\ 0.334\\ 0.098\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.724\\ 1.009\\ 0.294\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max}.W \big/ W=\lambda_{\max i}$$

$$\lambda_{\max 1}=1.724\big/0.568=3.035$$

$$\lambda_{\max 2}=1.009\big/0.334=3.021$$

$$\lambda_{\max 3}=0.294\big/0.098=3$$

$$\lambda_{\max}=\frac{\lambda_{\max 1}+\lambda_{\max 2}+\lambda_{\max 3}}{3}$$

$$\lambda_{\max}=\frac{3.035+3.021+3}{3}=3.019$$

$$I.I.=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{3.019-3}{3-1}=0.0095$$

$$I.R.=\frac{I.I.}{I.I.R_{3\times 3}}=\frac{0.0095}{0.58}=0.016$$

$$I.R.=0.016<0.1$$

نرخ ناسازگاری ماتریس کمتر از ۰٫۱ است بنابراین سازگاری آن مورد قبول می باشد.

- با استفاده از روش ریاضی پیشنهادی زیر می توان به نرخ ناسازگاری دلخواه در یک ماتریس مقایسه زوجی دست یافت.

با یک مثال روش را توضیح می دهیم :

فرض کنید ماتریس مقایسه زوجی بصورت زیر داده شده است،این ماتریس کامل است . ناسازگاری این ماتریس صفر است، می خواهیم این ناسازگاری به ۰،۰۲ افزایش یابد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

قدم اول :

با توجه به میزان ناسازگاری داده شده(۰،۰۲) ، $\lambda_{\max}$را محاسبه می کنیم.

$$1)\quad \text{I.R.}=\frac{\text{I.I.}}{\text{I.I.R.}} \quad , \quad 0.02=\frac{\text{I.I.}}{0.58} \quad \Rightarrow \quad \text{I.I.}=0.0116$$

$$2)\quad \text{I.I.}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \quad , \quad 0.0116=\frac{\lambda_{\max}-3}{3-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max}=3.0232$$

قدم دوم :

۱ – یکی از a_{ij} ها رابرابر x قرار داده، در نتیجه $a_{ji}=\frac{1}{x}$می شود . ماتریس A را تشکیل می دهیم.

۲ – ماتریس $(A-\lambda I)$ را مشخص می کنیم(با بهره گیری از روش بردار ویژه).

۳ – دترمینان ماتریس $(A-\lambda I)$ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می دهیم . از آنجا که $\lambda_{\max}$را در قدم اول محاسبه کرده ایم، آنرا جایگزین کرده و مقادیر x را بدست می آوریم .

حل مثال :

$$1)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/x & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad a_{13}=x \quad , \quad a_{31}=1/x$$

$$2)\quad (A-\lambda I)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & x \\ 1/2 & 1-\lambda & 2 \\ 1/x & 1/2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$3)\quad \det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^3+\frac{x^2+16}{4x}-3(1-\lambda)=0$$

$$\lambda_{\max}=3.0232 \quad \rightarrow \quad (1-3.0232)^3+\frac{x^2+16}{4x}-3(1-3.0232)=0$$

$$x^2-8.8482x+16=0$$

$$x_1=6.31 \quad , \quad x_2=2.5$$

- محاسبه نرخ ناسازگاری

$$x = 6.3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6.3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6.3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ W = [0.617 \quad 0.267 \quad 0.115]$$

$$A.W = \lambda_{\max}.W \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6.3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6.3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.617 \\ 0.267 \\ 0.115 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8755 \\ 0.8055 \\ 0.3464 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max 1} = 3.0397$$

$$\lambda_{\max 2} = 3.0169$$

$$\lambda_{\max 3} = 3.0125$$

$$\lambda_{\max} = \frac{3.0397 + 3.0169 + 3.0125}{3} = 3.023$$

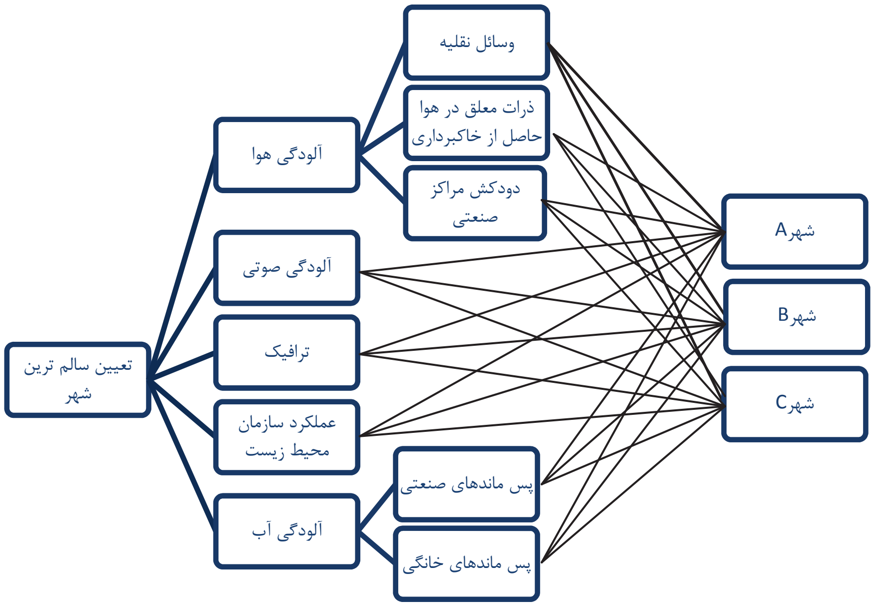
$$I.I. = \frac{3.023 - 3}{2} = 0.0115 \quad , \quad \text{I.R.} = \frac{0.0115}{0.58} = 0.02$$

محاسبه نرخ ناسازگاری یک درخت سلسله مراتبی :

برای محاسبه نرخ ناسازگاری یک سلسله مراتبی شاخص ناسازگاری هر ماتریس (I.I.) را در وزن عنصرمربوطه اش ضرب نموده و حاصل جمع آنها را بدست می آوریم . این حاصل جمع را $\overline{I.I.}$ می نامیم ، همچنین وزن عناصر را در ماتریسهای مربوطه ضرب کرده و مجموعشا ن را $\overline{I.I.R}$ نامگذاری میکنیم.

حاصل تقسیم $\overline{I.I}/\overline{I.I.R}$ نرخ ناسازگاری سلسله مراتبی را می دهد.

مثال : کارشناسان محیط زیست قصد دارند سه شهر A, C,B را از لحاظ مسا ئل زیست محیطی مورد ارزیابی قرار دهند.بدین منظور ۵ شاخص اصلی را در نظر گرفته اند.دو مورد از شاخص های اصلی ،متشکل از شاخص های فرعی می باشند.در شکل زیر سلسله مراتب تصمیم رسم شده است.



آلودگی هوا (محاسبه وزن به روش میانگین حسابی):

وسائل نقلیه	**شهرA**	**شهرB**	**شهرC**	وزن نسبی
شهرA	۱	۱/۳	۲	۰,۲۳
شهرB	۳	۱	۵	۰,۶۵
شهرC	۱/۲	۱/۵	۱	۰,۱۲
			I.I.=۰,۰۰۲	I.R.=۰,۰۳۴

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \\ \hline 4.5 & 1.53 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow W=\begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.65 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

$$P\times W=\lambda_{\max}.W$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \\ \hline 4.5 & 1.53 & 8 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.65 \\ 0.12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.686 \\ 1.94 \\ 0.365 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max 1}=2.983$$

$$\lambda_{\max 2}=2.985$$

$$\lambda_{\max 3}=3.042$$

$$\lambda_{\max}=3.003 \quad , \quad \text{I.I.}=\frac{3.003-3}{2}=0.002 \quad , \quad \text{I.R.}=\frac{0.0020}{0.58}=0.0034$$

ذرات معلق در هوا حاصل از خاکبرداری	شهر**A**	شهر**B**	شهر**C**	وزن نسبی
شهر**A**	۱	۱/۲	۴	۰,۳۳
شهر**B**	۲	۱	۵	۰,۵۷
شهر**C**	۱/۴	۱/۵	۱	۰,۱
			I.I.=۰,۰۱۲۶	I.R.=۰,۰۲۱۸

دود کش مراکز صنعتی	**شهرA**	**شهرB**	**شهرC**	وزن نسبی
شهرA	۱	۶	۳	۰,۶۴
شهرB	۱/۶	۱	۱/۴	۰,۰۹
شهرC	۱/۳	۴	۱	۰,۲۷
			I.I.=۰,۰۲۸۰	I.R.=۰۴۸۳

	ترکیب اولویت های آلودگی هوا			
	وسائل نقلیه(۰,۴۵)	ذرات معلق در هوا حاصل از خاکبرداری (۰,۲)	دودکش مراکز صنعتی(۰,۳۵)	ترکیب
شهرA	۰,۲۳	۰,۳۳	۰,۶۴	۰,۳۹۳
شهرB	۰,۶۵	۰,۵۷	۰,۰۹	۰,۴۳۸
شهرC	۰,۱۲	۰,۱	۰,۲۷	۰,۱۶۹
	I.R.=۰,۰۰۳۴	I.R.=۰,۰۲۱۸	I.R.=۰۴۸۳	

آلودگی صوتی :

آلودگی صوتی	شهرA	شهرB	شهرC	وزن نسبی
شهرA	۱	۱/۵	۳	۰,۱۹۳
شهرB	۵	۱	۷	۰,۷۲۴
شهرC	۱/۳	۱/۷	۱	۰,۰۸۳
			I.I.=۰,۰۳۲۸	I.R.=۰,۰۵۶۶

ترافیک :

ترافیک	شهرA	شهرB	شهرC	وزن نسبی
شهرA	۱	۳	۵	۰,۶۴۸
شهرB	۱/۳	۱	۲	۰,۲۳۰
شهرC	۱/۵	۱/۲	۱	۰,۱۲۲
			I.I.=۰,۰۰۱۸	I.R.=۰,۰۰۳۲

عملکرد سازمان محیط زیست:

عملکرد سازمان محیط زیست	شهرA	شهرB	شهرC	وزن نسبی

شهرA	۱	۵	۶	۰,۷۰۷
شهرB	۱/۵	۱	۳	۰,۲۰۱
شهرC	۱/۶	۱/۳	۱	۰,۰۹۲
			I.I.=۰,۰۴۸۰	I.R.=۰,۰۸۲۷

آلودگی آب :

پس ماندهای صنعتی	**شهرA**	**شهرB**	**شهرC**	وزن نسبی
شهرA	۱	۲	۴	۰,۵۷۱
شهرB	۱/۲	۱	۲	۰,۲۸۶
شهرC	۱/۴	۱/۲	۱	۰,۱۴۳
			I.I.=۰	I.R.=۰

پس ماندهای خانگی	**شهرA**	**شهرB**	**شهرC**	وزن نسبی

شهرA	۱	۳	۴	۰,۶۱
شهرB	۱/۳	۱	۳	۰,۲۷
شهرC	۱/۴	۱/۳	۱	۰,۱۲
			I.I.=۰,۰۳۷۰	I.R.=۰,۰۶۳۸

	ترکیب اولویت های آلودگی آب		
	پس ماندهای صنعتی(۰,۷۵)	پس ماندهای خانگی (۰,۲۵)	ترکیب
شهرA	۰,۵۷۱	۰,۶۱	۰,۵۸۱
شهرB	۰,۲۸۶	۰,۲۷	۰,۲۸۲
شهرC	۰,۱۴۳	۰,۱۲	۰,۱۳۷
	I.R.=۰	I.R.=۰,۰۶۳۸	

مقایسات شاخص های اصلی :

	آلودگی هوا	**آلودگی صوتی**	**آلودگی آب**	**ترافیک**	**عملکرد سازمان**	**وزن نسبی**

					محیط زیست	
آلودگی هوا	۱	۴	۲	۳	۵	۰,۳۹۵
آلودگی صوتی	۱/۴	۱	۱/۲	۴	۳	۰,۱۶۳
آلودگی آب	۱/۲	۲	۱	۶	۷	۰,۳۱۰
ترافیک	۱/۳	۱/۴	۱/۶	۱	۲	۰,۰۸۰
عملکرد سازمان محیط زیست	۱/۵	۱/۳	۱/۷	۱/۲	۱	۰,۰۵۲
						I.I.=۰,۰۸۳۰ I.R.=۰,۰۷۴۱

ترکیب وزن نسبی هر گزینه :

معیار / گزینه	آلودگی هوا (۰,۳۹۵)	آلودگی صوتی (۰,۱۶۳)	آلودگی آب (۰,۳۱۰)	ترافیک (۰,۰۸۰)	عملکرد سازمان محیط زیست (۰,۰۵۲)	وزن نسبی
شهرA	۰,۳۹۳	۰,۱۹۳	۰,۵۸۱	۰,۶۴۸	۰,۷۰۷	۰,۴۵۵

شهرB	۰,۴۳۸	۰,۷۲۴	۰,۲۸۲	۰,۲۳۰	۰,۲۰۱	۰,۴۰۷
شهرC	۰,۱۶۹	۰,۰۸۳	۰,۱۳۷	۰,۱۲۲	۰,۰۹۲	۰,۱۳۸

$$\overline{I.I.} = (1\times 0.083) + \begin{bmatrix} 0.395 & 0.163 & 0.310 & 0.080 & 0.052 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.01322 \\ 0.03280 \\ 0.00925 \\ 0.00180 \\ 0.04800 \end{bmatrix} = 0.0991$$

$$\overline{I.I.R.} = (1\times 1.12) + \begin{bmatrix} 0.395 & 0.163 & 0.310 & 0.080 & 0.052 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.58 \\ 0.58 \\ 0.58 \\ 0.58 \end{bmatrix} = 1.7$$

$$I.R. = \frac{\overline{I.I.}}{\overline{I.I.R.}} = \frac{0.0991}{1.7} = 0.058$$

نرخ ناسازگاری سیستم از حد مجاز (۰,۱) کمتر بوده و نیازی به تجدید نظر در مقایسه های زوجی نمی باشد.

نتیجه گیری :

AHP یک روش تصمیم‌گیری چند معیاره است که از ساختار سلسله مراتبی و یا شبکه ای برای نمایش مسئله تصمیم‌گیری استفاده می‌کند و سپس اولویت ها را براساس قضاوت‌های تصمیم گیرندگان، در طول روند فرآیند مشخص می‌کند. به طور کلی، مدل‌های چند معیاره به روش‌های وزن دهی، روش‌های رتبه بندی، روش‌های هدف گرا و روش‌های تابع ارزش، دسته بندی می‌شوند. AHP یکی از روش‌های تابع ارزش است. دلیلی که باعث می‌شود، روش AHP را برای

داده‌های عملیاتی کیفی مناسب بدانیم این است که معیارهای کیفی معمولا پیچیده و ناسازگار هستند. همچنین روش AHP در مقایسه با دیگر روش‌های مدل تصمیم‌گیری چند معیاره از نظر مقبولیت کاربر امتیاز بالاتری دارد.

در روش AHP نیازی نیست که قضاوت ها سازگار باشند و حتی رابطه غیر مستقیم داشته باشند. بلکه قضاوت ها باید کاملا تصادفی صورت گیرند. مقیاسی که باید برای ارزیابی قابل قبول بودن میزان سازگاری استفاده شود، نسبت سازگاری است.

منا بع :

- قدسی پور، سید حسن، " مباحثی در تصمیم گیری چند معیاره "، انتشارات دانشگاه امیر کبیر، ششم، ۱۳۸۷.

- مجله پژ وهش و سازندگی در زراعت، مقاله " اولویت بندی طرحهای تحقیقات کشاورزی با تاکید بر فرآیند تحلیل سلسله مراتبی"،شماره ۷۲.

". AHP فرآیند تحلیل سلسله مراتبی ، مقاله "GIS سیستم اطلاعات جغرافیایی -

- Cathy Macharis a,*, Johan Springael b,Klaas De Brucker c,Alain Verbeke a
synergies in multicriteria analysis. 2004.PROMETHEE and AHP: The design of operational

- James G. Dolan *2008. Shared decision-making – transferring research into practice: The Analytic Hierarchy Process (AHP)

- Ni-Bin Chang a,*, Ying-Hsi Chang b, Ho-Wen Chen.2009. Fair fund distribution for a municipal incinerator using GIS-based fuzzy analytic hierarchy process.