ارایه مدلی جدید در سیستم های کنترل موجودی برای اقلام فساد پذیر با تقاضای وابسته به قیمت محصول و با توجه به ارزش زمانی پول و مجاز بودن کمبود

مسعود ربانی[۱]، جعفر رزمی[۲]، ندا معنوی زاده[۳] ، هاشم وحدانی[۳]

گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
mrabani@ut.ac.ir

چکیده

در این مقاله با رویکرد جریان نقدی تنزیل یافته با مدل موجودی ارایه شده برخورد شده است. اقلام تولیدی با نرخی متغیر با زمان که از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، دچار خرابی می‌شوند. هر دو نوع کمبود، تقاضای پس افت وفروش از دست رفته، مجاز می باشد. تقاضا تابعی خطی و نزولی از قیمت محصول می‌باشد. تابع هدف بصورت تعیین سیاست بهینه قیمت‌گذاری محصول و طول مدت تولید در یک سیکل کامل می‌باشد بطوری که ارزش فعلی کل سود حاصله در طی افق برنامه‌ریزی محدود، ماکزیمم شود. در بازه‌ای که سیستم موجودی با کمبود مواجه است، تقاضا با نرخی که تابعی از زمان می‌باشد دچار حالت پس افت می‌شود. در انتها مثالی جهت تبیین مدل به همراه روش حل مدل ارایه شده است.

واژه های کلیدی : ƿ ƹƷł ÆƗƘǭƹ ğÑř- ǻƘǉƘǽ ř 5 Ơəł- ƿ ƿƹə ƹł Ơ'5Y Ǵǫəʒ- ƿ ƹƷł ÆǪǖə YÑ5.

۱- مقدمه

در مدل‌های سنتی کنترل موجودی، فاکتورهایی از قبیل ارزش زمانی پول، تورم وخرابی محصولات در طول مدت نگهداری و حمل و نقل درون کارخانه‌ای وارد مدل نمی‌شدند. در شرایط واقعی عواملی همچون فرصت‌های سرمایه‌گذاری از دست رفته به علت سرمایه درگیر در موجودیها، خرابی و فسادپذیری محصولات بدلایل پیش بینی نشده و یا ساختاری و غیره توجه خاص به این فاکتورها را الزامی می‌نماید. بطور خاص می توان به محصولاتی از قبیل مواد دارویی ومحصولات لبنی و غیره به عنوان محصولاتی که مدل قابل اعمال بر روی آنها می‌باشد، اشاره کرد.

از لحاظ پیشینه تاریخی،Ghare and Schrader [1] اولین بار مساله فسادپذیری محصولات را وارد مسایل کنترل موجودی کردند. بعد از آن Eilon and Mallaya [2] مدل فوق را گسترش داده و تقاضای وابسته به قیمت محصول را مطرح کردند. Cohen [3] مدلی برای سیستم موجودی با در نظر گرفتن کمبود برای اقلام فسادپذیر با نرخ خرابی که از توزیع نمایی پیروی می‌کند ارایه داد.Kang and Kim [4] مدل Cohen را گسترش دادند و سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و بدون در نظر گرفتن کمبود را مدل کردند. Aggrawal and Jaggi [5] در مقاله خود به وجود یک نقص در مدل Cohen اشاره کرده و روش ساده‌تری را برای محاسبه قیمت محصول و سیاست تولیدی بهینه ارایه دادند.

---

[1] دانشیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

[2] استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

[3] کارشناس ارشد مهندسی صنایع دانشکده فنی دانشگاه تهران

بعد از آن Wee [6] مدل فوق را برای اقلام فسادپذیری که نرخ خرابی آنها از یک توزیع ویبول پیروی می‌کرد، ارایه داد. Buzacott [7] شاید اولین کسی بود که مفهوم تورم را وارد مدل‌های کنترل موجودی نمود. Mizra [8] بطور همزمان تاثیر تورم و ارزش زمانی پول را در هر دو حالت نرخ تورم داخلی و خارجی بررسی و تاثیر نرخ بهره و نرخ تورم بر روی استراتژی بهینه تولید را نشان داد.[9] Chandra&Bahner مدل Mizra را گسترش داده و اثر وجود کمبود در سیستم موجودی را بررسی کردند.[10] Sarker and Pan مدلی جدید برای سیستم تولیدی با نرخ تولید محدود وکمبود مجاز ارائه دادند.[11] Chung الگوریتمی جدید را برای حل مدل ارایه شده در سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و افق برنامه ریزی نامحدود ارایه داد. Datta and Pal [12] تاثیرات تورم وارزش زمانی پول در مدل موجودی با نرخ تقاضای حطی وابسته به زمان وکمبود مجاز در سیستم را بررسی کرده اند.[13] Hariga مدل Datta and Pal را گسترش داده وتابع نرخ تقاضای نزولی و پریودهای متغیر تولیدی را وارد مدل کرد.[14] Wee and Law مدل موجودی برای سیستمی با نرخ تقاضای وابسته به قیمت محصول برای اقلام فسادپذیری که نرخ خرابی آنها از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند و کمبود (تقاضای پس افت) مجاز می‌باشد، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول ارایه داده‌اند. مبنای اصلی این مقاله مدل ارائه شده توسط Wee and Law می‌باشد. مشخصه اصلی مدل ارایه شده در این مقاله که به وضوح آن را از مدل ایشان متمایز می سازد، در نظرگرفتن همزمان دو نوع کمبود، تقاضای پس افت[1]و فروش از دست رفته[2]، با اعمال نرخ موثر تقاضای پس افت که تابعی متغیر از زمان در نظر گرفته شده و بر تابع تقاضا اثر می‌کند، می‌باشد.

در این مقاله از تکنیک جریان نقدی تنزیل‌یافته[3] برای اعمال ارزش زمانی پول درمدل ارایه شده برای سیستم موجودی با مشخصات زیر استفاده شده است:

۱- اقلام تولیدی فسادپذیر بوده وتابع چگالی عمر محصولات از توزیع ویبول با پارامترهای α, β پیروی می‌کند.

۲- دو نوع کمبود، تقاضای پس افت و فروش از دست رفته، مجاز می‌باشد. نرخ تقاضای پس افت بصورت تابعی از زمان که بر نرخ تقاضا اثر می‌گذارد، در نظر گرفته شده است.

۳- تقاضا بصورت تابعی نزولی و خطی از قیمت فروش محصول در نظر گرفته شده است.

تابع هدف مساله بصورت حداکثر کردن ارزش فعلی سود می‌باشد. تمامی فاکتورهای موثر در تابع سود با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول در تابع هدف وارد شده‌اند.

۲- توسعه مدل ریاضی

۲-۱- فرضیات مدل

مدل ریاضی ارایه شده در مدل بر اساس فرضیات زیر بنا نهاده شده است:

۱- افق برنامه ریزی محدود می‌باشد.

۲- زمان تا خرابی محصولات ازیک توزیع ویبول با پارامترهای α, β پیروی می‌کند.

۳- ارزش زمانی پول درمدل لحاظ شده است.

۴- هر دو نوع کمبود (تقاضای پس افت وفروش از دست رفته) مجاز می‌باشد.

۵- هیچ گونه جایگزینی یا دوباره کاری بر روی محصولات خراب و فاسد شده صورت نمی‌گیرد.

۶- مرکب شدن بصورت پیوسته صورت می‌گیرد.

۷- نرخ تقاضا تابعی خطی و نزولی از قیمت محصول می‌باشد.

۸- نرخ تولید محدود و ثابت بوده و بزرگتر از نرخ تقاضا می‌باشد.

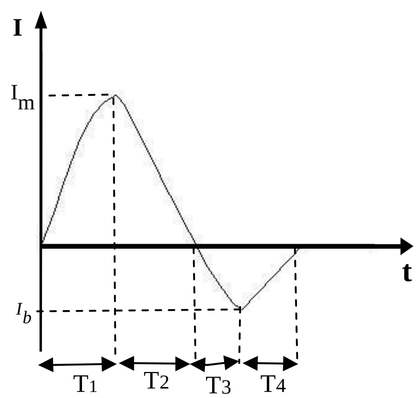
1- Backorders
2- Lost Sales
3- Discounted Cash Flow

۹- مقدار تولید، سطح موجودی، پریودهای مختلف زمانی تشکیل دهنده هر سیکل و میزان تقاضا هر یک متغیرهای پیوسته در نظر گرفته شده‌اند و فقط تعداد سیکل‌های تولیدی در افق برنامه‌ریزی عدد صحیح می‌باشد.

۱۰- مبادله کالا با پول بصورت آنی صورت می‌گیرد.

۲-۲- معرفی پارامترهای بکاررفته در مدل

جهت سهولت در فهم مطالب، نمای کلی از وضعیت تغییرات سطوح موجودی در یک سیکل تولیدی، در قالب شکل (۱) ارایه گردیده است:



شکل ۱- تغییرات سطح موجودی در یک سیکل کامل تولیدی

در پریود T_1 در هر سیکل، تولید تا رسیدن به حداکثر سطح موجودی صورت می‌گیرد و تقاضا برآورده می‌شود و عامل فسادپذیری نیز بر روی موجودیها تاثیر می‌گذارد. پارامتر زمان در این فاصله با t_1 نشان داده شده است. در فاصلهٔ T_2 در هر سیکل، تولید متوقف بوده و سطح موجودیها کاهش یافته (بنا به تقاضا و نرخ خرابی) و این کاهش تا زمان T_1+T_2 در هر سیکل ادامه می‌یابد تا سطح موجودیها به صفر برسد. از این لحظه به بعد یعنی در فاصله زمانی T_3 سطح موجودی منفی شده و دچار کمبود می‌شویم. البته شیب لحظه‌ای نمودار در این قسمت کمتر از نرخ تقاضای رسیده به کارخانه می‌باشد چرا که قسمتی از تقاضا در این قسمت بنا به حالت فروش از دست رفته از سیستم حذف می‌شود. مقدار تقاضای پس افت با نرخی که تابعی از زمان می‌باشد و بر تقاضای محصول اعمال می‌گردد، قابل محاسبه می‌باشد. در لحظهٔ $T_1+T_2+T_3$ در هر سیکل تولیدی، دوباره آماده‌سازی صورت گرفته و تولید برای مرتفع ساختن تقاضای پس افت و تقاضای رسیده صورت می‌گیرد تا در انتهای این پریود سطح موجودی به صفر می‌رسد و از اینجا به بعد سیکل جدید آغاز می‌شود.

لازم به ذکر است که در پریود T_4، دیگر با فروش از دست رفته مواجه نیستیم چرا که بنا به سیاست اتخاذی در برآورده سازی تقاضا و عدم مطلوبیت کمبود از نوع فروش از دست رفته با توجه به تاثیر منفی آن در موقعیت رقابتی موسسه، ابتدا تقاضاهای جدید برآورده می‌شود. حال به معرفي پارامترهاي بكار رفته در مدل مي‌پردازيم:

$d(s)$: نرخ تقاضا كه تابعي نزولي از قيمت فروش محصول مي باشد و بصورت زير تعريف مي‌شود:

$$d(s) = g - hs$$

g,h پارامترهاي ثابت و مثبت بوده و بنا به شرايط حاكم بر بازار و بصورت تجربي قابل محاسبه مي‌باشند. همچنين بايد داشته باشيم:

$$g\text{-}hs > 0 \quad \text{يا} \quad s < g/h$$

C : هزینه هر واحد از محصول تولیدی در زمان $t = 0$

S: قیمت فروش هر واحد در زمان $t = 0$

P : نرخ تولید ($P > d(s)$)

$I_j(t_j)$: سطح موجودی در زمان t_j در پریود j ام

H : افق برنامه‌ریزی

T : سیکل تولیدی

N : تعداد سیکل‌های تولیدی در افق برنامه‌ریزی ($N = H/T$)

T_1+T_2 : طول پریودی از هر سیکل که سطح موجودی مثبت می‌باشد

T_3+T_4 : طول پریودی از هر سیکل که با کمبود مواجه‌ایم

r : مقدار ثابتی که نشان دهنده اختلاف بین نرخ تنزیل و نرخ تورم می‌باشد

I_m : حداکثر سطح موجودی

I_b : حداکثر مقدار کمبود

C_1: هزینه آماده سازی در $t = 0$

C_2 : هزینه نگهداری هر واحد محصول در واحد زمان در $t = 0$

C_3 : هزینه هر واحد تقاضای پس افت در واحد زمان در $t = 0$

C_4 : هزینه هر واحد تقاضای ازدست رفته در $t = 0$

$z(t)$: نرخ آنی خرابی

k : نرخ تقاضای پس افت که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{1}{1 + \gamma (T_3 - t_3)}$$

γ یک مقدار ثابت ومثبت می‌باشد. بدین ترتیب هر چه در پریود T_3 جلوتر می‌رویم، با افزایش t_3 نرخ فوق افزایش می‌یابد که کاملا نشان دهندهٔ شرایط حاکم بر دنیای واقعی می‌باشد، چراکه با نزدیک شدن به پریود T_4 که بازه تولیدی می‌باشد، تقاضاهای رسیده، به میزان بیشتری پذیرفته مـی‌شوند و بر روی نظر مشتریان نیز در انتخاب شرکت به عنوان تامین کننده تاثیر مثبت دارد.

۲-۳- ارایه مدل ریاضی

در ابتدا به محاسبهٔ نرخ آنی خرابی می‌پردازیم. اگر $f(t)$ تابع چگالی احتمال عمر محصول باشد که طبق تعریف از توزیـع ویبول با پارامترهای α,β برخوردار است، آنگاه نرخ آنی خرابی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (۱)$$

$F(t)$: تابع توزیع تجمعی عمر محصول

تابع چگالی ویبول بصورت زیر می‌باشد:

$$f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad \alpha,\beta > ۰ \ ، \ t > 0 \qquad (۲)$$

α,β به ترتیب پارامترهای مقیاس و شکل توزیع ویبول می‌باشند. باید توجه داشت که با قرار دادن $\beta = 1$، چگالی توزیع نمایی که کاربرد بسیار زیادی نیز در زمینهٔ تقریب زدن طول عمر محصولات مختلف دارد، حاصل می‌گردد. برای چگالی احتمال ویبول داریم:

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad (۳)$$

لذا نرخ آتی خرابی برابر خواهد بود با:

$$Z(t)=\frac{\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}}}{e^{-\alpha t^{\beta}}}=\alpha\beta t^{\beta-1} \qquad (۴)$$

حال بعد از معرفی پارامترهای فوق، می‌توانیم تغییرات سیستم موجودی با گذشت زمان را در قابل معادلات دیفرانسیل مربوطه، نشان دهیم. در لحظه $t=0$ اولین آماده‌سازی صورت می‌گیرد. در این لحظه موجودی در دست صفر می‌باشد. در پریود T_1 سطح موجودی تحت تاثیر نرخ‌های تولید، تقاضا و خرابی قرار داشته و افزایش می‌یابد تا به بیشترین حد خود (I_m) می‌رسد. در پریود زمانی T_2 تولید متوقف و سطح موجودی تحت تاثیر نرخ تقاضا و نرخ خرابی کاهش می‌یابد تا به زمان $t=T_1+T_2$ می‌رسد که سطح موجودی در آن صفر می‌باشد. در پریود زمانی T_3، مقادیر کمبود شروع و تقاضای پس افت افزایش می‌یابد تا به زمان $t=T_1+T_2+T_3$ که مقدار کمبود در بالاترین سطح قرار دارد می‌رسد. در ابتدای پریود زمانی T_4 مجدداً آماده‌سازی صورت گرفته و تولید آغاز می‌شود و به تقاضای پس افت و تقاضای رسیده، رسیدگی می‌شود.

این مراحل در قالب معادلات دیفرانسیل زیر معرفی شده‌اند:

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1}=P-[d(s)+\alpha\beta t_1^{\beta-1}I_1(t_1)] \qquad 0\le t_1\le T_1 \qquad (۵)$$

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2}=-[d(s)+\alpha\beta t_2^{\beta-1}I_2(t_2)] \qquad 0\le t_2\le T_2 \qquad (۶)$$

$$\frac{dI_3(t_3)}{dt_3}=-[\frac{d(s)}{1+\gamma(T_3-t_3)}] \qquad 0\le t_3\le T_3 \qquad (۷)$$

$$\frac{dI_4(t_4)}{dt_4}=P-d(s) \qquad 0\le t_4\le T_4 \qquad (۸)$$

با کمک شرایط مرزی زیر قادر به حل معادلات فوق می باشیم :

$$I_1(0)=0 \qquad I_2(0)=I_m \qquad I_3(0)=0 \qquad I_4(0)=-I_b$$

بدین ترتیب با در اختیار داشتن معادلات $I_i(t_i)$ قادر خواهیم بود تمامی فاکتورهای موثر بر تابع سود شامل درآمد حاصل از فروش و هزینه‌های موجودی را محاسبه کنیم. نتایج زیر از حل معالات فوق حاصل می گردد:

$$I_1(t_1)=\frac{\int_0^{t_1}[P-d(s)]e^{\alpha u^{\beta}}du}{e^{\alpha t_1^{\beta}}} \qquad 0\le t_1\le T_1 \qquad (۹)$$

$$I_2(t_2)=\frac{I_m-d(s)\int_0^{t_2}e^{\alpha u^{\beta}}du}{e^{\alpha t_2^{\beta}}} \qquad 0\le t_2\le T_2 \qquad (۱۰)$$

$$I_3(t_3)=\frac{d(s)}{\gamma}Ln(\frac{1+\gamma(T_3-t_3)}{1+\gamma T_3}) \qquad 0\le t_3\le T_3 \qquad (۱۱)$$

$$0\le t_4\le T_4$$

$$I_4(t_4)=[P-d(s)]t_4-I_b \qquad (۱۲)$$

حال به کمک رابطه (۱۰) می توانیم حداکثر سطح موجودی را محاسبه کنیم:

$$I_m = d(s)\int_0^{T_2} e^{\alpha u^{\beta}}\,du = d(s)\int_0^{T_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n u^{n\beta}}{n!} = d(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n T_2^{\,n\beta+1}}{n!(n\beta+1)} \qquad (۱۳)$$

با فرض اینکه α مقدار کوچکی باشد، می‌توان از جملات با توان ۲ و بالاتر شا مل α در معادلهٔ فوق صرفنظر کرد. لذا خواهیم داشت:

$$I_m = d(s)\left(T_2 + \frac{\alpha T_2^{\,\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (۱۴)$$

به همین صورت به کمک معادلهٔ (۱۱) حداکثر مقدار کمبود برابر خواهد بود با:

$$I_3(t_3) = -I_b = \frac{d(s)}{\gamma} Ln\left(\frac{1}{1+\gamma T_3}\right)$$

$$I_b = \frac{d(s)}{\gamma} Ln\left(1+\gamma T_3\right) \qquad (۱۵)$$

حال به محاسبه تک تک عوامل تشکیل دهنده تابع سود نهایی که همان تابع هدف مساله می‌باشد، می‌پردازیم:

۲-۳-۱- ارزش فعلی درآمد حاصل از فروش

تولید انجام شده در پریود T_1 بواسطه تقاضا و خرابی در پریود T_1,T_2 مصرف می شود.در پریـود T_4 نیـز تمـام محصـولات تولیدی جهت برآورده سازی تقاضای رسیده و تقاضای پس افت، مصرف می‌شود.با فرض اینکـه درآمـدهای حاصـل از فـروش بصورت آنی قابل‌حصول باشد، ارزش فعلی درآمد حاصل از فروش برابر است با:

$$R = S\left\{\int_0^{T_1} d(s)e^{-rt_1}dt_1 + \int_0^{T_2} d(s)e^{-r(T_1+t_2)}dt_2 + \int_0^{T_4} Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)}dt_4\right\} = \frac{S}{r}\left\{d(s) - e^{-r(T_1+T_2)}d(s) - Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)} + Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)}\right\} \qquad (۱۶)$$

با فرض اینکه r مقدار کوچکی باشد، می‌توانیم جواب تقریبی زیر را با صرفنظر کردن از جملاتی که درجه r در آنها ۲ و بالاتر می‌باشد، بدست آوریم:

$$R \cong \frac{S}{2}\left(2d(s)T_2 - d(s)rT_2^2 - 2\Pr T_2T_4 + 2d(s)T_1 - d(s)rT_1^2 + 2PT_4 - \Pr T_4^2 - 2d(s)rT_1T_2 - 2\Pr T_1T_4 - 2\Pr T_3T_4\right. \qquad (۱۷)$$

۲-۳-۲- ارزش فعلی هزینه های آماده سازی

در ابتدای سیکل اول،یک آماده سازی با هزینه C_1 صورت می گیرد و آماده‌سازی بعدی در زمان $t= T_1+T_2+T_3$ با همان هزینه C_1 رخ می‌دهد. از اینجا به بعد سایر زمانهای آماده‌سازی عبارتند از:

$t = T_1+T_2+T_3+ iT \quad i=1,2,3,,\ldots,N\text{-}1$

X را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X \cong C_1\left[1 - r(T_1+T_2+T_3)\right] \qquad (۱۸)$$

همانند قسمت قبل با فرض کوچک بودن r ، مقدار تقریبی x برابر خواهد بود با:

$$X \cong C_1\left[1 - r(T_1+T_2+T_3)\right] \qquad (۱۹)$$

لذا ارزش فعلی کل هزینه های آماده سازی برا بر است با:

$$C_s = C_1 + \sum_{i=0}^{N-1} X e^{-r(iT)} \qquad (۲۰)$$

۲-۳-۳- ارزش فعلی هزینه های نگهداری محصولات

در پریودهای T_1 و T_2 که سطح موجودی مثبت می‌باشد، متحمل هزینه‌های نگهداری که پارامترهای مختلفی از جمله هزینه بیمه، سرمایه درگیر، هزینه های انبارداری و غیره را در بر می‌گیرد، می‌شویم. ارزش فعلی هزینه‌های نگهداری برابر است با:

$$C_H = C_2\left\{\int_0^{T_1} I_1(t_1)e^{-rt_1}dt_1 + \int_0^{T_2} I_2(t_2)e^{-r(T_1+t_2)}dt_2\right\} = C_2\int_0^{T_1}\left(\frac{\int_0^{t_1}[P-d(s)]e^{\alpha u^\beta}du}{e^{\alpha t_1^\beta}}\right)e^{-rt_1}dt_1 + C_2\int_0^{T_2}\left(\frac{\int_0^{T_2} d(s)e^{\alpha u^\beta}du - \int_0^{t_2} d(s)e^{\alpha u^\beta}du}{e^{\alpha t_2^\beta}}\right)e^{-r(T_1+t_2)}dt_2$$

(۲۱)

با فرض کوچک بودن مقادیر α و r ، با صرفنظرکردن از جملات با توانهای ۲ و بزرگتر و همچنین جملاتی که شامل عبارتی بر حسب حاصل ضرب α و r می‌باشند، عبارت زیر حاصل خواهد شد:

$$C_H = C_2[P-d(s)]\left[\frac{T_1^2}{2} - \frac{rT_1^3}{3} - \frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)}\right] + C_2 d(s)\left[\frac{T_2^2(1-rT_1)}{2} - \frac{rT_2^3}{6} + \frac{\alpha\beta T_2^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}\right]$$

(۲۲)

۲-۳-۴- ارزش فعلی هزینه های کمبود

در پریود زمانی T_3 و T_4 سیستم با کمبود مواجه می‌شود. در پریود T_3 هزینه‌های کمبود شامل هزینه‌های ناشی از تقاضای پس افت وفروش از دست رفته می باشد در صورتیکه در پریود T_4 فقط هزینه تقاضای پس افت را شامل می‌شود. نحوهٔ محاسبه این هزینه ها بصورت مشروح در زیر ارایه گردیده است:

۲-۳-۴-۱- هزینه تقاضای پس افت

$$C_{Sh_1} = C_3\left\{\int_0^{T_3} -I_3(t_3)\, e^{-r(T_1+T_2+t_3)}dt_3 + \int_0^{T_4} -I_4(t_4)\, e^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)}dt_4\right\}$$

$$= C_3\left\{\int_0^{T_3} -\frac{d(s)}{\gamma}\, Ln\left(\frac{1+\gamma\,(T_3-t_3)}{1+\gamma\, T_3}\right)e^{-r(T_1+T_2+t_3)}dt_3 + \int_0^{T_4} -\frac{d(s)}{\gamma}\big(P-d(s)\big)\,(T_4-t_4)e^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)}dt_4\right\} \qquad (۲۳)$$

با حل معادلات فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$C_{sh_1}=\frac{-C_3 d(s)}{r\gamma}e^{-r(T_1+T_2+T_3)}(-\ln(\frac{1}{1+\gamma T_3})+e^{\frac{-r}{\gamma}}\left(rT_3\ln(1+\gamma T_3)\right)+\frac{r^2}{4\gamma^2}(-\gamma^2T_3^2-2\gamma T_3)$$
$$+\frac{r^3}{18\gamma^3}(1-(1+\gamma T_3)^3)))+\ldots+C_3(P-d(s))(\frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)}}{r^2}+\frac{T_4}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3)}-\frac{1}{r^2}e^{-r(T_1+T_2+T_3)})$$
(۲۴)

۲-۳-۴-۲- هزینه فروش از دست رفته

$$C_{sh_2}=C_4\int_0^{T_3}\frac{\gamma(T_3-t_3)d(s)}{1+\gamma(T_3-t_3)}e^{-r(T_1+T_2+t_3)}dt_3=C_4 d(s)e^{-r(T_1+T_2+T_3+\frac{1}{\gamma})}*$$
$$[-\frac{1}{\gamma}-\frac{T_3r}{\gamma}-\frac{T_3^2r}{2}+\frac{r^2}{12\gamma^3}+\frac{r^3}{72\gamma^4}+\frac{r^4}{480\gamma^5}+\ldots+\ln(1+\gamma T_3)\times(T_3-\frac{1+\gamma T_3}{\gamma})+$$
$$(\frac{1+\gamma T_3}{\gamma})(T_3r+1)+(1+\gamma T_3)^2\frac{r^2}{4\gamma^2}+(\frac{r}{18\gamma}-\frac{1}{12\gamma})(1+\gamma T_3)^3(\frac{r}{\gamma})^2+\ldots..)\ ] \qquad (۲۵)$$

۲-۳-۵- ارزش فعلی هزینه اقلام تولیدی

اقلام تولیدی در پریود های T_1 و T_4، صرف تقاضای رسیده در پریود T_1 و T_2 و تقاضای پس افت و رسیده در پریود T_3 و T_4 می شود. از اینرو هزینه اقلام شامل اقلام فروش رفته و فاسد شده می‌باشد. بدین ترتیب هزینه اقلام در طی یک سیکل برابر خواهد بود با:

$$C_p=CPT_1+CPT_4e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \qquad (۲۶)$$

همانند قسمت‌های قبل به ازای مقادیر کوچک r خواهیم داشت:

$$C_p=CPT_1+CPT_4\left[1-r(T_1+T_2+T_3\right] \qquad (۲۷)$$

۳- محاسبه ارزش فعلی سود خالص

افق برنامه‌ریزی مدنظر از N سیکل تولیدی تشکیل شده است.با توجه به اینکه در ابتدای سیکل اول، موجودی صفر می‌باشد، یک آماده سازی با هزینه C_1 صورت می‌گیرد که هزینه آن را باید از درآمدهای خالص کم کرد. نهایتاً افق برنامه‌ریزی شامل $N+1$ آماده سازی می‌باشد که به ازاء هر کدام از آنها یک دسته تولیدی خواهیم داشت. اندازه دسته تولیدی اول PT_1 و اندازه دسته تولیدی دوم تا N ام برابر $P(T_4+T_1)$ خواهد بود. اندازه دسته تولیدی آخر نیز PT_4 می‌باشد. حال با در اختیار داشتن مولفه‌هایی که محاسبه کردیم قادریم تابع سود نهایی (NP_T) را بدست آوریم. توضیح اینکه مقادیر فوق را باید به ازای N پریود وبا در نظر گرفتن ارزش زمانی پول، در تابع هدف واردکرد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$NP_T=\left(R-X-C_H-C_P-C_{sh_1}-C_{sh_2}\right)\sum_{i=0}^{N}e^{irT}-C_1=\left(R-X-C_H-C_P-C_{sh_1}-C_{sh_2}\right)\left(\frac{1-e^{-rNT}}{1-e^{-rT}}\right)-C_1 \qquad (۲۸)$$

تابع فوق از متغیرهای S, N, T_4, T_3, T_2, T_1 تشکیل شده است و به وضوح از پیچیدگی بالایی نیز برخوردار است. بی شک حل تحلیلی چنین معادله ای بر اساس شش متغیر فوق غیر ممکن می‌باشد. لذا باید به دنبال آن باشیم که به نحوی تعداد متغیرها را با کمک برخی روابط کمکی کاهش دهیم. در این راستا به سراغ روابط حدی که در حل معادلات دیفرانسیل از آنها استفاده کردیم، می‌رویم. با کمک روابط (۹) و (۱۰) و دانستن این مطلب که:

$$I_1(T_1) = I_2(T_2) = I_m$$

داریم:

$$\frac{\int_0^{T_1}\left[P-d(s)\right]e^{\alpha u^{\beta}}\,du}{e^{\alpha T_1^{\beta}}} = \int_0^{T_2} d(s)e^{\alpha u^{\beta}}\,du \qquad (۲۹)$$

جواب تقریبی معادله (۲۹) که از حذف جملات با درجه ۲ و بالاتر بر حسب آلفا بدست می‌آید، برابر خواهد بود با:

$$\left(P-d(s)\right)\left(T_1-\frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\cong d(s)\left(T_2+\frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (۳۰)$$

حل معادله (۳۰) بصورت تحلیل بسیار مشکل می‌باشد. لذا برای سهولت و امکان پذیری حل مساله، از جمله $\frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{\beta+1}$ در طرف چپ معادله (۳۰) بالا صرفنظر می‌کنیم. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$T_1\cong\frac{d(s)}{P-d(s)}\left(T_2+\frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (۳۱)$$

بدین ترتیب متغیر T_1 از معادلات حذف می‌شود. به روش مشابه قادر خواهیم بود متغیـر هـای T_4 و T_3 را نیـز بصـورت توابعی از T_2 بدست آوریم. برای این منظور از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$T_3 + T_4 = T - T_1 - T_2 \qquad (۳۲)$$

$$I_b = \left[P-d(s)\right]T_4 = \frac{d(s)}{\gamma}Ln(1+\gamma T_3) \qquad (۳۳)$$

برای حل همزمان معادلات(۳۲)و(۳۳) بمنظور حذف متغیرهای T_3 و T_4 از معادلات، با توجه به پیچیدگی معادله (۳۳) از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. جوابهای حاصل در برنامه‌ای که بمنظور حل تابع هدف نهایی تدوین شده است، بکاررفته که با توجه به پیچیدگی معادلات از آوردن آنها در این قسمت خودداری می‌کنیم. مقدار متغیر T نیز از رابطه $T=H/N$ قابل جایگزینی در تابع هدف اصلی می‌باشد. بدین ترتیب تابع هدف، تابعی از ۳ متغیر N, T_2, S بصورت زیر خواهد بود:

Objective Function : Maximize $NP_T(S,T_2,N)$
Subject to:

$$C < S < g/h$$
$$0 \le T_2 < T$$

۴- بررسی و حل مدل

تابع هدف مساله بصورت حداکثر سازی تابع ۳ متغیره NP_T می‌باشد. از آنجایی که پیدا کردن جوابهای بهینه این مساله به روش تحلیلی و روشهای مرسوم ریاضیاتی، با توجه به پیچیدگی بسیار بالای تابع هدف عملاً غیرممکن می باشد، لذا برای رسیدن به حل بهینه این مدل از یک روش ابتکاری به شرحی که در ادامه می آید استفاده می کنیم. این روش ابتکاری از سه مرحله تشکیل شده است:

۱) انتخاب مقدار اختیاری برای N

۲) محاسبه مشتقات جزئی NP_t نسبت به تنها متغیرهای اصلی مساله یعنی S,T_2 و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل از برابر قرار دادن این مشتقات با صفر

$$\frac{\partial}{\partial T_2} NP_T\ (S, T_2, N) = 0 \qquad (۳۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} NP_T\ (S, T_2, N) = 0 \qquad (۳۵)$$

۳) تکرار قدم ۲ برای N های مختلف ومحاسبه مقدار بهینه تابع هدف برای هر یک از جوابهایی که از حل دستگاه بالا بدست می‌آید. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به جواب بهینه که از مقایسه تمامی این مقادیر با هم قابل حصول است، برسیم. شایان ذکر است شرایط لازم برای اعتبار جواب حاصل از این روش، محدب بودن تابع هدف می‌باشد، لذا جواب بهینه باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial s \partial T_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}\right) < 0 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}<0 \qquad (b)$$

$$\frac{\partial^2 NP_T}{\partial s^2}<0 \qquad (c)$$

شرایط فوق به نوعی تضمینی برای وجود یک نقطه ماکزیمم برای تابع سود می‌باشند. البته در این مدل جهت حصول اطمینان از برقراری روابط a,b,c بعد از اینکه مقدار بهینه تابع هدف در هر مرحله بر اساس متد فوق الذکر مشخص شد، بصورت عددی به بررسی صحت وسقم شرایط فوق بسنده می‌کنیم چرا که اثبات تحلیلی چنین امری عملاً غیرممکن می باشد.

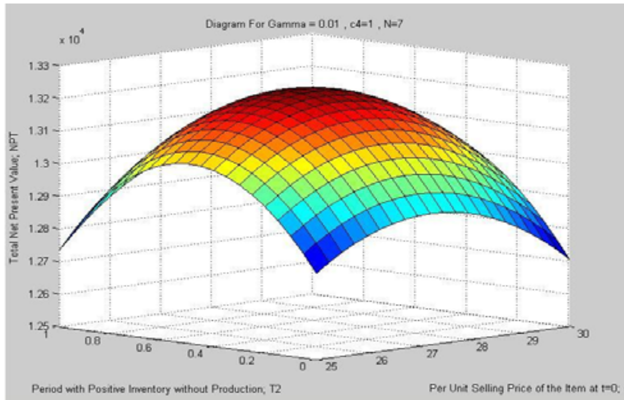
در این مقاله برای حل مساله فوق از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. از جمله قابلیت‌های این نرم افزار رسم منحنیهای توابع مختلف با پیچیدگیهای بالا می‌باشد که از این قابلیت در حل این مساله به بهترین نحو استفاده شده است. با ترسیم منحنی تغییرات تابع NP_T بر حسب متغیرهای S,T_2 به راحتی می‌توان از محدب بودن تابع هدف و در نتیجه برقراری شرایط a,b,c برای جواب بهینه و قابل اتکا بودن آن اطمینان حاصل کرد. با انتخاب مقادیر مختلف برای پارامترهای موجود در مساله قادر خواهیم بود فضاهای مختلف تولیدی را بررسی کنیم. به عنوان مثال در صورتیکه در سیستم مد نظر فروش از دست رفته وجود نداشته باشد، می‌توان با انتخاب $C_4=0$, $\gamma = 0$ به خواسته خود رسید. نکته قابل توجه اینکه در این مساله با توجه به معادلات مربوط به هزینه‌های تقاضای پس افت و فروش از دست رفته واینکه پارامتر γ در مخرج برخی کسرها ظاهر شده است، نمی‌توان مستقیماً γ را برابر صفر قرار داد و باید تغییرات تابع هدف را در حالت حدی مورد بررسی قرار داد.

۵- نتایج محاسباتی

تمامی پارامترها مطابق مثالی که در [۱۴] ارایه شده است، انتخاب شده‌اند به غیر از C_4, γ که در آن مدل وجود ندارند. مقادیر هر یک از پارامترها در زیر ارایه شده است.

C_1=80/set up , C_2=0.6/unit/year , C_3=1.4/unit/year , C_4=1/unit , C=5/unit , $\alpha = 0.05$, $\beta = 1.5$
r =0.08 , g=200 , h=4 , P=400/year , H=10 (year) , $\gamma = 0.01$

شکل (۲) تغییرات تابع هدف را به ازای N=7 نشان می دهد. محدب بودن تابع هدف کاملاً مشهود می باشد.



شکل ۲- منحنی تغییرات تابع هدف بر حسب متغیرهای S,T_2

درجدول شماره (۱) نتایج کامل محاسبات به همراه مقدار بهینه تابع هدف به ازای مقادیر مختلف N ارایه شده است.

جدول ۱- نتایج کامل محاسبات به همراه مقدار بهینه تابع هدف برای مثال ارایه شده

تعداد سیکل تولیدی (N)	S	T_1	T_2	T_3	T_4	T	ارزش فعلی سود
۶	۲۷/۷۵	۰/۲۸	۰/۹۵	۰/۳٤	۰/۱۰	۱/٦۷	۱۲۹٦۰/۰۰
۷	۲۷/۵۰	۰/۱٦	۰/۵۵	۰/۵٦	۰/۱٦	1/٤۳	۱۳۲۲۲/۰۰
۸	۲۷/۲۵	۰/۰٦	۰/۲۰	۰/۷۷	۰/۲۲	1/۲۵	۱۳۵۵۲/۰۰
۹	۲٦/۷۵	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۸۵	۰/۲٦	۱/۱۱	۱۳۹۳۵/۰۰
.							.
.							.
.							.
۲۱	۲٦/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۳٦	۰/۱۱	۰/٤۸	۱۵۳۳۸/۰۰
۲۲(بهینه)	۲٦/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۳۵	۰/۱۱	۰/٤۵	**۱۵۳۳۹/۰۰**
۲۳	۲٦/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۳۳	۰/۱۰	۰/٤۳	۱۵۳۳۳/۰۰
۲۴	۲٦/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۳۲	۰/۱۰	۰/٤۲	۱۵۳۲۱/۰۰

همانطور که مشاهده می‌شود، در این سیستم موجودی زمانی سود حاصله حداکثر می‌شود که هیچ گاه موجودی در دست مثبت نشود و عملاً سیستمی خواهیم داشت که در هر سیکل کامل، در بازه زمانی بطول T_3 تولید متوقف و بمحض رسیدن به حداکثر سطح کمبود مجاز، تولید شروع و تا زمانی که سطح موجودی به صفر می رسد،تولید ادامه خواهد داشت.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه سیستم موجودی برای اقلام فسادپذیر که نرخ خرابی از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند،پرداخته شده است. هر دو نوع کمبود (فروش از دست رفته و تقاضای پس افت)در مدل وارد شده است. مقدار تقاضا بصورت تابعی خطی از قیمت محصول در نظر گرفته شده است و بدین ترتیب قیمت محصول نیز جزء پارامترهایی که باید مقدار بهینه آنها تعیین شود، قرار می‌گیرد. ارزش زمانی پول در مدل وارد شده و مرکب شدن پول بصورت پیوسته در نظر گرفته شده است. تابع هدف بصورت حداکثر کردن ارزش فعلی سود در یک افق زمانی محدود می‌باشد. مثالی نیز برای تبیین مدل و نحوه

عملکرد مدل ارایه شده است. به عنوان پیشنهاد برای ادامه مطالعات در این زمینه می توان به مواردی از جمله در نظرگرفتن پارامترهای تصادفی و یا فازی در مدل اشاره کرد.

۷- مراجع

[1] P.M. Ghare and G.F. Schrader, A model for exponentially decaying inventory,Journal of Industrial Engineering, Vol. 14, 238-43 (1963).

[2] S. Eilon and R.V. Mallaya, Issuing and Pricing policy of semi-perishables, Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research, New York: Wiley-Interscience (1996).

[3] M.A. Cohen, Joint pricing and ordering policy for exponentially decaying inventory with known demand, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 24, 257-68 (1997).

[4] S. Kang and I. Kim, A study on the price and production level of the deteriorating inventory system, International Journal of production Research, Vol. 21, 899-908 (1983).

[5] S.P. Aggarwal and C.K. Jaggi, Ordering policy for decaying inventory, International Journal of Systems Science, Vol. 20, 151-5 (1989).

[6] H.M. Wee, A replenishment policy for items with a price-dependent demand and varying rate of deterioration, Production Planning and Control, Vol. 8, 494-9 (1997).

[7] J.A. Buzacott, Economic order quantities with inflation, Operational Research Quarterly, Vol. 26, 553-8 (1975).

[8] R.B. Misra, A note on optimal inventory management under inflation, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 26, 161-5 (1979).

[9] MJ. Chnadra and M.L. Bahner, The effects of inflation and the time value of money on some inventory systems, International Journal of production Research, Vol. 23, 723-30 (1985).

[10] B.R. Sarker and H. Pan, Effects of inflation and time value of money on order quantity and allowable shortage, International Journal of Production Economics, Vol. 34, 65-72 (1994).

[11] K.J. Chung, Optimal ordering time interval taking account of time value, Production Planning and Control, Vol. 7, 264-7 (1996).

[12] T.K. Datta and A.K. Pal, Effects of inflation and time value of money on an inventory model with linear time-dependent demand rate and shortages, European Journal of Operational Research, Vol. 52, 326-33 (1991).

[13] M.A. Hariga, Effects of inflation and time value of money on an inventory model with time dependent demand rate and shortages, European Journal of Operational Research, Vol. 81, 512-20 (1995).

[14] H.M. Wee and S.H. Law, Economic production lot size for deteriorating items taking account of time value of money, Computer and Operations Research, Vol. 26, 545-58 (1999).