مسئله‌ی تخصیص درجه دوم
QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM

فهرست

فهرست

کلیات و مفاهیم اولیه

- مساله تخصیص درجه دوم یکی از مسایل بهینه‌سازی ترکیبی است که به اختصاص تعدادی تسهیل به تعدادی مکان می‌پردازد.
- اولین بار توسط Koopman و Beckman در سال ۱۹۵۷ معرفی شد.
- تفاوت اصلی آن با سایر مسائل تخصیص کلاسیک، وجود رابطه‌ی بین هر جفت از تسهیلات است که منجر به یک تابع هدف غیرخطی می‌شود.
- هدف تخصیص n تسهیل به m مکان است به طوری که کل هزینه‌های حمل و نقل حداقل شود.

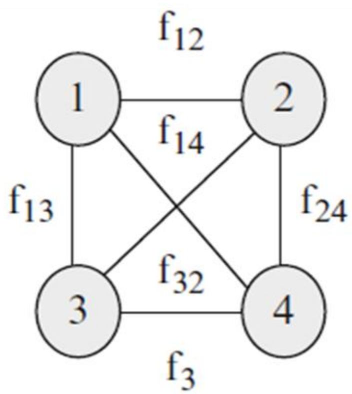
- Sahni و Gonzalez در سال ۱۹۷۶ ثابت کردند که مساله تخصیص درجه دوم در رده مسائل NP-hard قرار دارد.
- محققان و دانشمندان بسیاری در زمینه ریاضیات، کامپیوتر، تحقیق درعملیات و اقتصاد از آن برای مدلسازی مسائل بهینه‌سازی استفاده نمودند.

کلیات و مفاهیم اولیه

مثال:

- مساله موردنظر: تخصیص تسهیلات به مکان‌ها در یک شرکت
- تعداد تسهیلات: ۴
- تعداد مکان‌ها: ۴
- هر یک از تسهیلات دقیقا برای یک مکان طراحی شده و بالعکس.
- هدف: یافتن حداقل هزینه‌ی تخصیص تسهیلات به مکان‌ها
- هزینه: مجموع حاصل ضرب فاصله_جریان تمامی تسهیلات

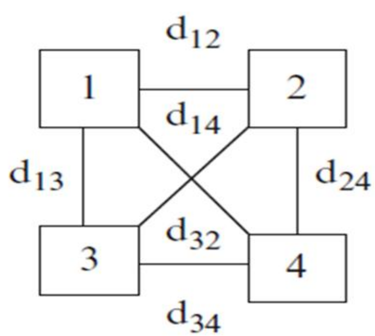
- تسهیلات و ماتریس جریان:



Facilities

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

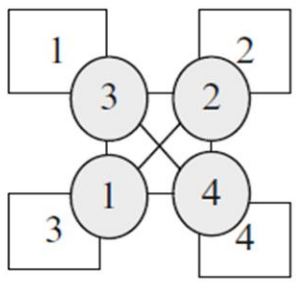
- مکان‌ها و ماتریس فاصله:



Locations

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 \\ 10 & 0 & 15 & 18 \\ 20 & 15 & 0 & 11 \\ 30 & 18 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

- تخصیص و ماتریس فاصله بعد از تخصیص:



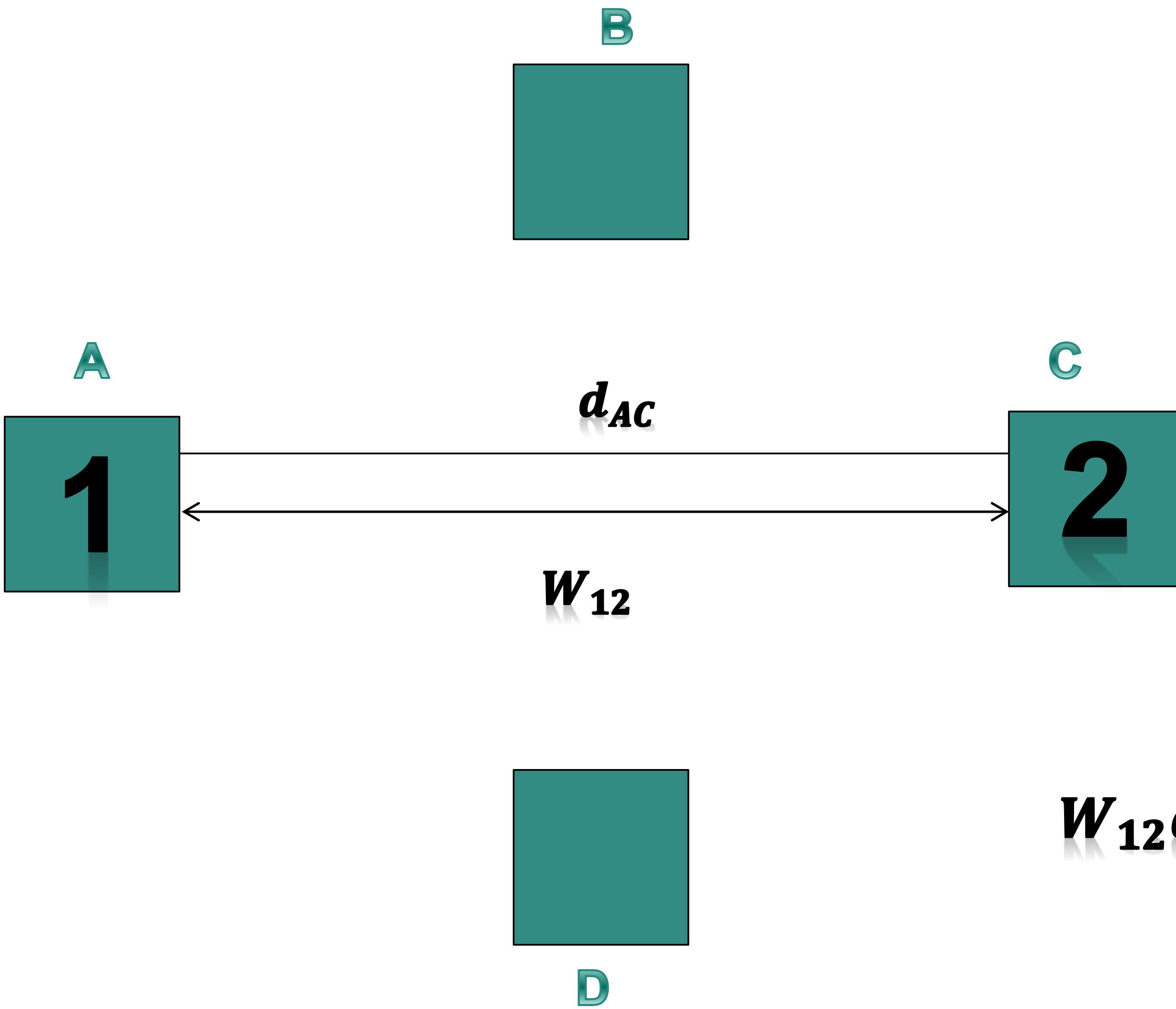
Assignment π

$$D^{\pi} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 & 0 \\ 15 & 0 & 18 & 10 \\ 0 & 15 & 11 & 20 \\ 11 & 18 & 0 & 30 \end{pmatrix},$$

Assignment $\pi = (3, 2, 4, 1)$

- مقدار تابع هدف: ماتریس D * ماتریس F
- مجموع هزینه ها: $D^{\pi} f = 2117$

مدل‌سازی



$$W_{12}d_{p_1p_2}$$

- در حالت کلی بین هر i و j یک چنین هزینه‌ای داریم:

$$w_{12}d_{p_1p_2}$$

- هزینه‌ی کل سیستم به ازای تمامی جفت واحدها:

$$\sum_{i,j} w_{ij}d_{p_ip_j}$$

قید ساختاری:

- هر مکان پذیرای تنها یک تسهیل
- اختصاص پیدا کردن هر تسهیل به یک مکان

$$\boldsymbol{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}}$$

$$\boldsymbol{k \in \{1,2,\ldots,m\}}$$

$$\boldsymbol{m \geq n}$$

$$\boldsymbol{i \neq j \quad \rightarrow \quad p_i \neq p_j}$$

شکل کلی مدل:

$$Min\ z = \sum_i \sum_j w_{ij} d_{p_i p_j}$$

تابع هدف

S.T.

$$\forall \quad i \neq j \rightarrow p_i \neq p_j$$

قید ساختاری

$$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$p_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

فرمول‌هایی که برای QAP تا بحال ارائه شده است:

- فرمول‌بندی برنامه ریزی عدد صحیح (ILP)
- فرمول‌بندی برنامه ریزی عدد صحیح آمیخته (MILP)
- فرمول‌بندی به وسیله‌ی جایگشت
- فرمول‌بندی اثر
- فرمول‌بندی گراف

فرمول‌بندی برنامه‌ریزی عدد صحیح (ILP):

فرضیات مدل:

- تابع هدف مینیمم کردن مجموع
- هر تسهیل دقیقا برای یک مکان طراحی شده و برعکس
- فضای حل گسسته و متناهی
- تعداد مکان‌ها و تسهیلات معلوم
- متغیرهای تصمیم مدل صفر و یک

ورودی‌های مدل:

- $F = [f_{ij}]$: ماتریس جریان بین تسهیلات i و j
- $P = [d_{kp}]$: ماتریس فاصله بین محل k و p
- $B = [b_{ik}]$: هزینه‌ی تخصیص تسهیل i به مکان k

خروجی مدل(متغیرهای تصمیم):

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \textit{if facility i assigned in location k} \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Beckman و Koopmans (1957) :

- $N = \{1, \ldots, n\}$
- هدف یافتن یک جایگشت از مجموعه‌ی N به منظور حداقل‌کردن تابع هدف

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} b_{i\varphi(i)} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{ij} d_{\varphi(i)\varphi(j)},$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$i, j, k, p = 1, \ldots, n$$

:(1963) Lawler

$c_{ijkp} = d_{kp} f_{ij}$ ✓

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} C_{ijkp} x_{ik} x_{jp},$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$
$$i, j, k, p = 1, \ldots, n$$

- خطی کردن

$$y_{ijkp} = x_{ij} x_{kp},$$

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} C_{ijkp} y_{ijkp},$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} y_{ijkp} = n^2,$$

$$x_{ij} + x_{kp} - 2y_{ijkp} \geq 0 \quad \forall i, j, k, p = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$i, j, k, p = 1, \ldots, n$$

فرمول‌بندی برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته (MILP):

- خطی‌کردن QAP به دلیل تعداد زیاد محدودیت‌ها و متغیرها مناسب نیست.
- احتیاج به مدل خطی QAP با تعداد کم‌تری از متغیرها و محدودیت‌ها

Kaufman و Broeckx (1978) :

- Z به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$z = \sum_i \sum_k x_{ik} \left(\sum_j \sum_p f_{ij} d_{kp} x_{jp} \right).$$

- و متغیر پیوسته به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$w_{ik} = x_{ik} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} f_{ij} d_{kp} x_{jp}.$$

- تابع هدف جدید حداقل‌کردن:

$$z = \sum_i \sum_k w_{ik}.$$

تابع هدف و محدودیت‌ها:

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_{ij},$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$h_{ij} x_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} c_{ijkp} x_{kp} - w_{ij} \leq h_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, w_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$

$$\text{where } h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} C_{ijkp}.$$

فرمول‌بندی به وسیله‌ی جایگشت:

فرضیات مدل:

- ✓ S_n مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌ها با n عنصر و $\pi \in S_n$
- ✓ f_{ij} جریان بین تسهیلات i و j
- ✓ $d_{\pi(i)\pi(j)}$ فاصله‌ی بین محل‌های $\pi(i)$ و $\pi(j)$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \pi(i) = j \\ 0 & \text{if } \pi(i) \neq j. \end{cases}$$

تابع هدف و محدودیت‌ها:

$$\min_{\pi \in s_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} d_{\varphi(i)\varphi(j)}.$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$
$$i, j, k, p = 1, \ldots, n$$

فرمول‌بندی گراف:

ورودی‌های مدل:

- ✓ $G^f = (V^f, E^f)$ گراف جریان غیرمستقیم
- ✓ $V^f = \{v_i; i = 1, \dots, n\}$ رئوسی که تسهیلات را نمایش می‌دهند
- ✓ $(v_i, v_j) \in E^f$ یال هایی که وجود جریان را نشان می‌دهند
- ✓ $f_{ij} = (v_i, v_j)$ هزینه‌ی یال
- ✓ $G^d = (V^d, E^d)$ فاصله‌ی گراف
- ✓ $V^d = \{v_i; i = 1, \dots, n\}$ رئوسی که مکان‌ها را پس از تخصیص نشان می‌دهد

تابع هدف و محدودیت‌ها:

$$\underset{\rho \in s_n}{\text{Min}} \sum_{(v_i, v_j) \in E^f} f_{ij}\, d_{\varphi(i)\varphi(j)}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$i, j, k, p = 1, \ldots, n$$

کاربردها

کاربرد QAP در علوم مختلف

Koopmans & Beckman	مطرح کردن QAP به عنوان یک مدل ریاضی
Steinberg	حداقل‌کردن تعداد اتصالات در صفحه‌ی سیم‌کشی با QAP
Heffley	به کار بردن QAP در مسائل اقتصادی

کاربرد QAP در علوم مختلف

White & Francis: برای تخصیص یک تسهیل جدید

Geoffrion & Graves: مسائل زمان‌بندی

Krarup & Pruzan: کاربرد QAP در مسائل باستان‌شناسی

کاربرد QAP در علوم مختلف

Hubert

کاربرد QAP در تحلیل‌های آماری

Forsberg

به کار بردن QAP در تحلیل‌های شیمیایی

Brusco & Stahl

آنالیز عددی

کاربرد QAP در مکان‌یابی

Hopkins & Dickney	تخصیص ساختمان‌ها در محوطه‌ی دانشگاه
Pollatschek	طراحی کیبورد تایپیست‌ها
Elshafei	طرح‌ریزی بخش‌های بیمارستان

کاربرد QAP در مکان‌یابی

Bos	مدیریت جنگل
Beenjaafar	برای حداقل‌کردن کار در فرآیند
Miranda	قرار دادن اجزای الکترونیکی

مسائل مرتبط

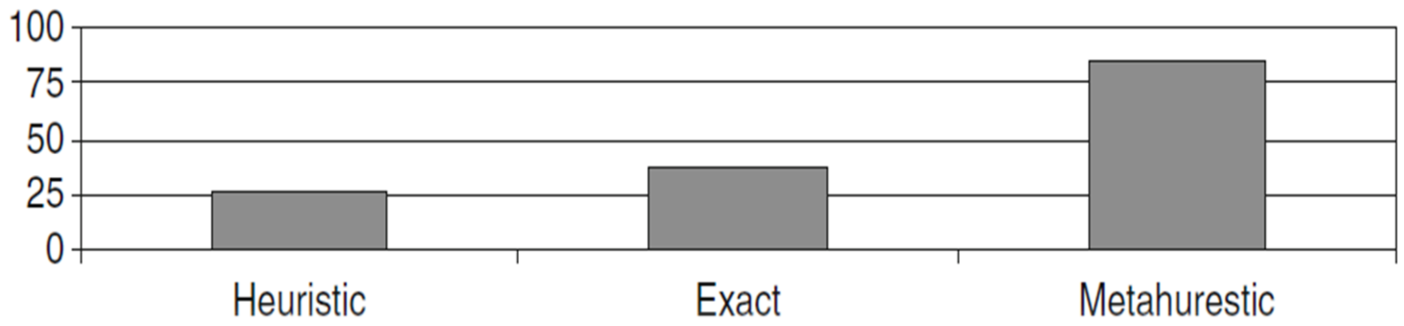
مسائل مرتبط با QAP:

مسئله تخصیص گلوگاه درجه دوم(QBAP)	(Steinberg,1961)
مسئله تخصیص توان چهارم (BiQAP)	(Burkard,1994)
مسئله نیمه‌تخصیص درجه دوم(QSAP)	(Hansen,1992)
مسئله تخصیص درجه دوم چندهدفه(MQAP)	(Knowles,2003)
مسئله تخصیص سه بعدی درجه دوم(Q3AP)	(Pierskalla,1967)
مسئله تخصیص درجه دوم تعمیم یافته(GQAP)	(Lee,2004)
مسئله تخصیص درجه دوم تصادفی(SQAP)	(Smith,2001)

تکنیک‌های حل

تکنیک‌های حل QAP:

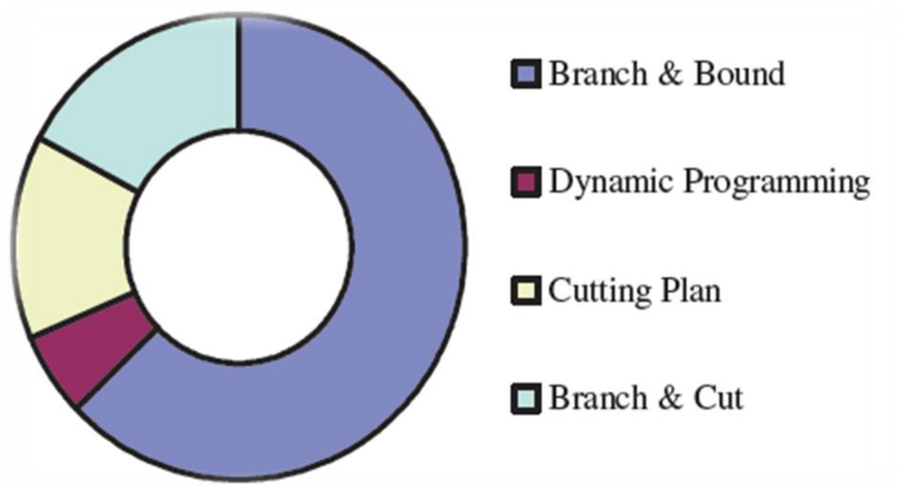
- روش‌های دقیق
- روش‌های ابتکاری
- روش‌های فراابتکاری



تکنیک‌های حل QAP

روش‌های دقیق:

- شاخه و کران
- برنامه برش
- شاخه و برش
- برنامه‌ریزی پویا



تکنیک‌های حل QAP

روش‌های ابتکاری:

- روش سازنده
- روش‌های شمارشی
- روش‌های بهبوددهنده
- روش‌های شبیه‌سازی

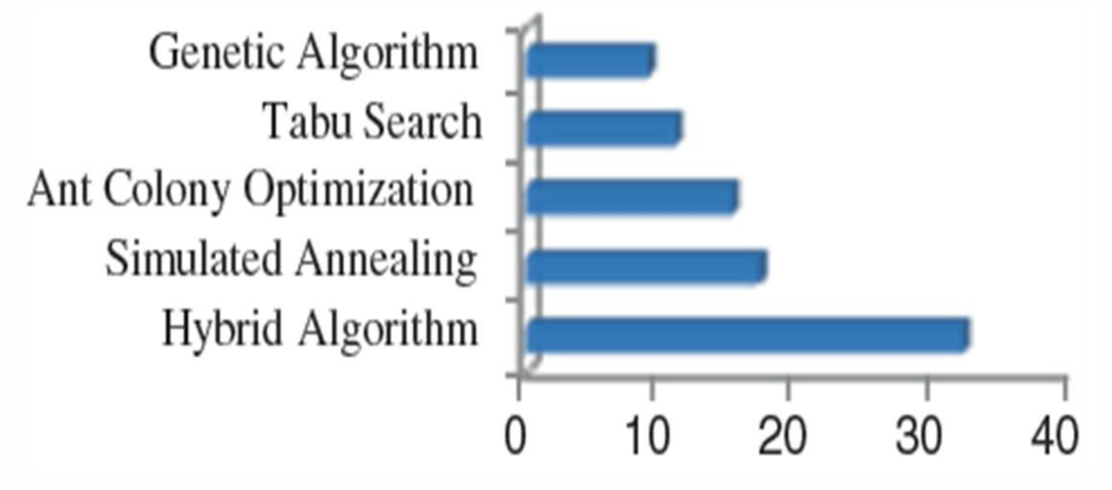
تکنیک های حل QAP

روش‌های فرا ابتکاری:

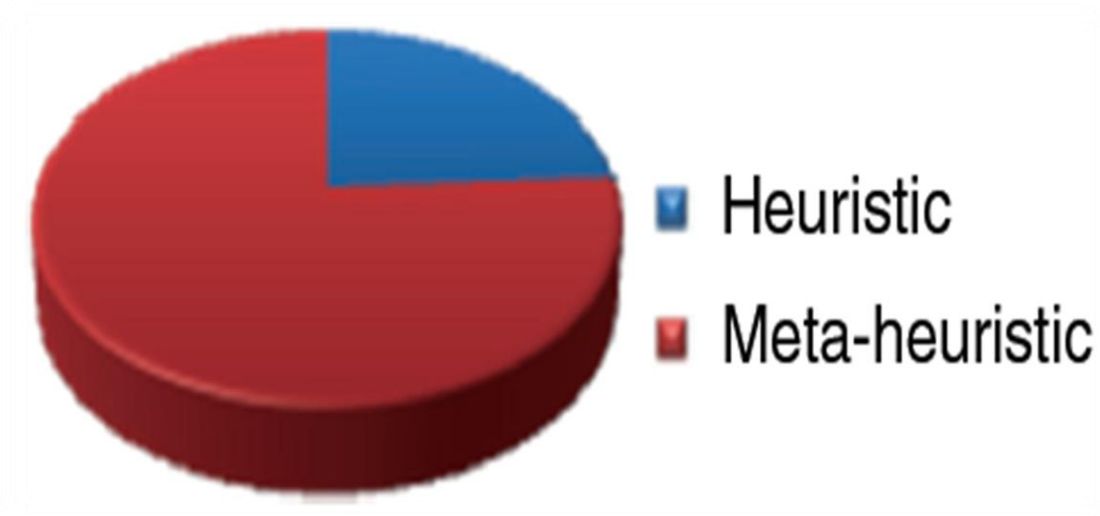
- الگوریتم جستجوی ممنوع
- تبرید شبیه‌سازی شده
- الگوریتم ژنتیک
- الگوریتم جستجوی پراکنده
- بهینه‌سازی کلونی مورچه
- الگوریتم‌های ترکیبی

و ...

تکنیک‌های حل QAP



تکنیک‌های حل QAP



مقایسه‌ی الگوریتم‌های QAP:

- الگوریتم‌های ترکیبی تقریبا بهتر از الگوریتم‌های تکی دقیق یا فراابتکاری منحصر
- اگر چه الگوریتم‌های ابتکاری و فرا ابتکاری رسیدن به حل بهینه را تضمین نمی کنند،به دلیل زمان محاسبات کمتر مقبولیت بیش‌تری نسبت به الگوریتم‌های دقیق دارند.

راه‌حل کلی QAP:

- ایجاد جایگشت از کل محل‌ها
- تعداد محل‌های بالقوه: ۱۰
- تعداد تسهیلات: ۳

3،8،2،~~1،9،7،4،10،6،5~~

1 2 3

تکنیک‌های حل QAP

1

ایجاد مکانیزمی برای تعریف،ذخیره‌سازی وبازخوانی اطلاعات مساله.

2

ایجاد مکانیزمی برای تولید پاسخ تصادفی.

3

ایجاد مکانیزمی برای تعبیر و تفسیر راه‌حل های خام و تبدیل آنها به متغیرهای اصلی مساله

تکنیک‌های حل QAP

4

ارزیابی تابع هدف و قیدها با استفاده از متغیرهای اصلی.

5

اتصال تابع هزینه تعریف شده به الگوریتم بهینه‌سازی.

مطالعه موردی

چیدمان بیمارستان به عنوان یک مساله تخصیص درجه دوم:

- ✓ توسط Elshafei در سال ۱۹۷۷
- ✓ مساله: مکان‌یابی بخش‌های بیمارستان
- ✓ هدف: حداقل‌کردن مجموع فاصله‌ی حمل و نقل طی شده توسط بیماران
- ✓ بیمارستان مربوطه: بیمارستان احمد ماهر در قاهره
- ✓ دارای ۶ بخش اصلی
- ✓ بخش بیماران خارجی با متوسط تعداد روزانه بیش از ۷۰۰ بیمار پرجمعیت‌ترین

مطالعه‌ی موردی

- حرکت بیماران بین ۱۷ درمانگاه در این بخش
- مورد انتقاد قرارگرفتن موقعیت مکانی درمانگاهها نسبت به یکدیگر
- تصمیم‌گیری به منظور بهبود چیدمان بخش برای کاهش مجموع فاصله‌های طی شده توسط بیماران
- هزینه‌ی چیدمان اصلی: ۱۳۹۷۳۲۹۸
- هزینه‌ی بهترین حل به دست آمده: ۱۱۲۸۱۸۸۷
- به طور کلی تقریبا ۱۹.۲٪ کاهش
- حل کامل به ۱۳۶ ثانیه زمان احتیاج داشت

مطالعه‌ی موردی

- حل ابتدایی بعد از ۴۴ ثانیه.یعنی ۹۲ ثانیه زودتر
- حل ابتدایی ۱۶.۴٪ بهتر از چیدمان اصلی

مطالعه‌ی موردی

سیم‌کشی صفحه‌ی پشت کامپیوتر به عنوان یک مساله تخصیص درجه دوم:

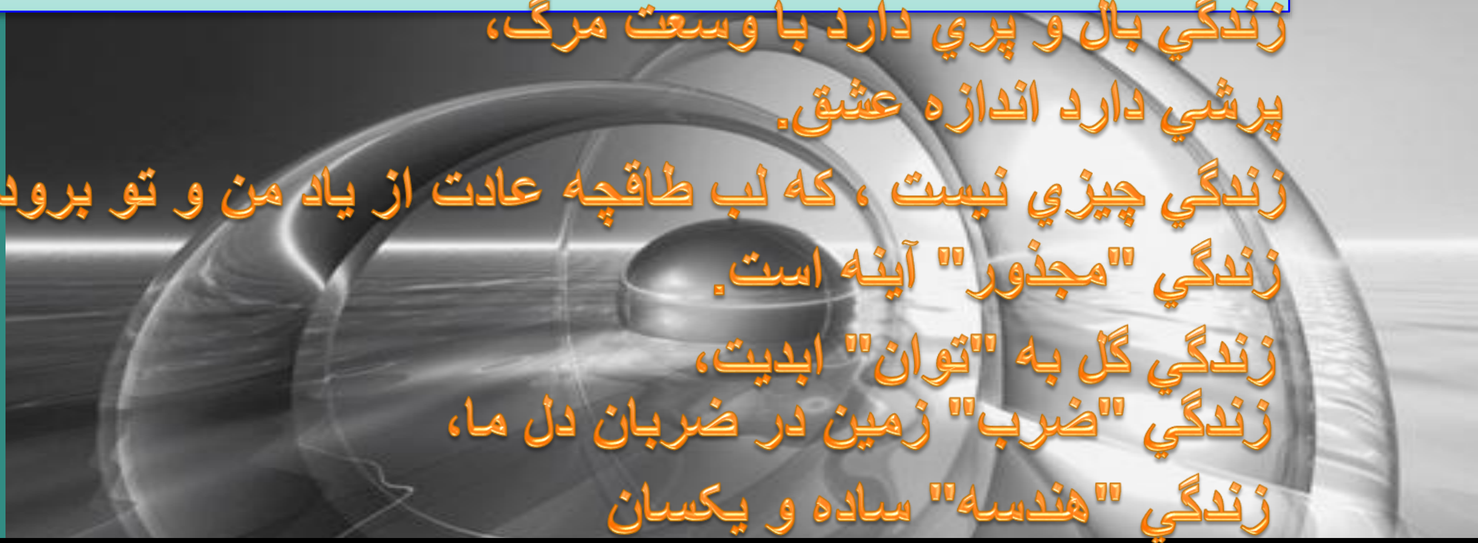
- توسط Steinberg در سال ۱۹۶۱
- مساله: جایگذاری قطعات کامپیوتر
- هدف: حداقل‌کردن مجموع مقدار سیم‌کشی موردنیاز برای اتصال قطعات
- تعداد قطعات: ۳۴
- مجموع ارتباطات: ۲۶۲۵
- تعداد مکان‌های بالقوه: ۳۶
- در نظر گرفتن ۲ قطعه‌ی ساختگی به منظوره فرموله‌کردن مساله

مطالعه‌ی موردی

- حل مساله با استفاده از الگوریتم شاخه و کران
- نتیجه: حل مساله به شکل یک QAP موجب کاهش تعداد اتصالات بین قطعات بر روی صفحه نسبت به حالت اولیه‌ی آن می‌شود.

طراحی مادربرد کامپیوتر به عنوان یک مساله تخصیص درجه دوم:

- توسط Miranda در سال ۲۰۰۵
- مساله: طراحی مادربرد کامپیوتر
- هدف: حداقل‌کردن فاصله‌ی بین اجزای الکترونیکی به منظور کنترل دما
- مدل دارای N قطعه‌ی الکترونیکی و N محل می‌باشد.
- در نظر گرفتن این مساله به عنوان یک مساله تخصیص درجه دوم
- حل مساله به وسیله‌ی الگوریتم ابتکاری
- نتیجه: مدل QAP طراحی شده دمای پایین‌تری را تولید می‌کند.



زندگي رسم خوشايندي است
زندگي بال و پري دارد با وسعت مرگ،
پرشي دارد اندازه عشق.
زندگي چيزي نيست ، كه لب طاقچه عادت از ياد من و تو برود.
زندگي "مجذور" آينه است.
زندگي گل به "توان" ابديت،
زندگي "ضرب" زمين در ضربان دل ما،
زندگي "هندسه" ساده و يكسان نفسهاست....

"سهراب سپهری"

با تشکر از توجه شما