• **قدم اول-** ماتریس تصمیم V را با اعداد صحیح ارزشی بدون بعد، از یک طیف دلخواه به کمک DM و یا حتی DMS [1] تهیه می‌کنیم. بدیهی است m گزینه و n شاخص خواهیم داشت که ترجیحا $m > n$ است، یعنی در حالت کلی:

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \ldots\ldots V_{1n} \\ V_{12} & V_{22} \ldots\ldots V_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots \\ V_{m1} & V_{m2} \ldots\ldots V_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

• **قدم دوم-** مجموعه مقایسات زوجی گزینه‌ها را به صورت زیر فراهم می‌کنیم.

$$S = \{(A_K, A_L) | \text{گزینه } A_K \text{ بر گزینه } A_L \text{ ترجیح دارد}\}$$

برای تشخیص برتری هر گزینه بر دیگری، فواصل اقلیدسی وزین تا گزینه ایده‌آل فرضی A^* مد نظر DM است که برای هر گزینه A_i به صورت زیر تعریف می شود.

$$\overline{A_i A^*} = d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} W_j \left(v_{ij} - v_j^*\right)^2}, i = 1,2,\ldots,m$$

که در آن W_j ها و V_j^*ها در ابتدا مجهولات یا متغیرهای مستقل مسئله در تابع هدف به حساب می‌آیند. V_{ij}ها نیز معلومات یا پارامترهای مدل محسوب می‌شوند.

توجه- برای راحتی محاسبات در مدل از مربع d_i ها به صورت زیر استفاده خواهد شد.

$$D_i = d_i^2 = \Sigma W_j \left(v_{ij} - v_j^*\right)^2, i = 1,2,\ldots,m$$

و این هیچ لطمه‌ای به حل مدل که نهایتا به رتبه‌بندی گزینه‌ها منجر می‌شود وارد نمی‌کند، بلکه مانع محاسبات رادیکالی نیز می‌شود.

[1] وجود چند DM باعث می‌شود که میانگین هندسی نظرات در ماتریس V با چهاررقم اعشار ثبت شود و این خود مشکل‌ساز است، مگر اینکه از میانه نظرات استفاده نمائیم.

طبق عرف مدل‌های خطی "LP" برای جواب بهینه یعنی (w, v^*) که خروجی مدل نیز خواهد بود باید در ساختار ریاضی آن محدودیت یا شرط قائل شویم. این شرط را عدول از $D_K \le D_L$ تعیین می‌کنیم. توجه داریم که $D_K \le D_L$ یعنی اینکه گزینه A_K فاصله کمتری از گزینه A_L نسبت به ایده‌آل یعنی A^* دارد لذا ارجح نیز هست. با این حساب $D_K > D_L$ را بدی[1] یا **نامطلوبی** یا **انحراف** و یا **ناسازگاری** در قضاوت DM درنظر می‌گیریم و آنرا با $(D_L - D_K)^-$ [2] نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(D_L - D_K)^- = \begin{cases} 0 & if \quad D_K \le D_L \quad \text{(سازگاری)} \\ D_k - D_L & if \quad D_K > D_L \quad \text{(ناسازگاری)} \end{cases}$$

$$= Max\{0 \quad , \quad (D_k - D_L)\}$$

مجموع انحرافات فوق ناشی از مقایسات زوجی $(A_K, A_L) \in S$ را با B نشان می‌دهیم لذا:

$$B = \sum_{(A_K, A_L) \in S} (D_L - D_K)^- = \Sigma Max\{0, (D_K, D_L)\}$$

پس مجموع ناسازگاریها را $B = \Sigma Max\{0, (D_K, D_L)\}$ در نظر می‌گیریم تا چنانچه کوچکترین انحرافی وجود داشته باشد در مجموع انحرافات منظور شود. نماد Max در اینجا به این معنی نیست که هر چه بیشتر شود بهتر است، بلکه اگر $D_K - D_L$ یعنی انحراف به اندازه اپسیلن (ε) هم باشد از صفر بیشتر است. لذا در محاسبات در نظر گرفته می‌شود. و اگر $D_K - D_L$ منفی باشد نیز صفر Max خواهد بود. یعنی انحراف وجود ندارد. البته چون مدل به صورت مینی‌ماکس عمل می‌کند هدف آن نیز حداقل یا min کردن مجموع این انحرافات خواهد بود.

حال که بدی یا ناسازگاری در قضاوت را تعریف کردیم، جا دارد که

---

[1] Badness

[2] علامت منفی (-) سمت راست پرانتز به نشان همان بد بودن است لذا اگر مقدار بگیرد طبق تعریف در منفی ضرب می‌شود و $D_K - D_L$ حاصل می‌شود.

خوبی[1] یا **سازگاری** در قضاوت DM را نیز متقابلا به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\left(D_L - D_K\right)^+ = \begin{cases} D_L - D_k & if \quad D_K \le D_L \quad \text{(سازگاری)} \\ 0 & if \quad D_K > D_L \quad \text{(ناسازگاری)} \end{cases}$$

مجموع خوبی ها یا سازگاری‌ها را نیز با G به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$G = \sum_{(A_K, A_L) \in S} \left(D_L - D_K\right)^+$$

- **قدم سوم**- مدل ریاضی "LP" مسئله را ارائه می‌دهیم. برای این کار:

۱) هدف مدل را معلوم می‌کنیم.

هدف اصلی مدل همانطور که قبلا نیز اشاره شد از نوع مینی‌ماکس (miniMax) است یعنی مینیمم کردن مجموع $Max\{0, (D_K - D_L)\}$ که گر $Max\{0, (D_K - D_L)\} = \varphi(A_K, A_L)$ فرض شود هدف اصلی مدل به صورت زیر خواهد بود.

$$\min B = \sum_{(A_K, A_L) \in S} \varphi(A_K, A_L)$$

که هر چه B کمتر باشد بهتر است. چنانچه صفر باشد دیگر هیچ انحرافی در قضاوت‌ها وجود نداشته است.

۲) محدودیت‌های مدل را معلوم کرده، آنها را می‌نویسیم.

شرط اصلی مدل این است که مجموع سازگاری‌ها یعنی G به طور قابل ملاحظه‌ای از مجموع ناسازگاری‌ها یعنی B بیشتر باشد یعنی $G > B$. چون $G - B > 0$ است آنرا مقدار مثبت ثابت h فرض می‌کنیم، که در حالت کلی $h = 1$ هم در نظر گرفته می‌شود. مقدار $G - B$ را نیز به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$G - B = \sum_{(A_K, A_L) \in S} \left(D_L - D_K\right)^+ - \sum_{(A_K, A_L) \in S} \left(D_L - D_K\right)^-$$

$$= \sum_{(A_K, A_L) \in S} \left[\left(D_L - D_K\right)^+ - \left(D_L - D_K\right)^-\right]$$

[1] Goodness

$$=\begin{cases}\sum_{(A_K,A_L)\in S}\left[(D_L-D_K)-0\right] & if \quad D_K\le D_L\\ \sum_{(A_K,A_L)\in S}\left[0-(D_K-D_L)\right] & if \quad D_K>D_L\end{cases}$$

که در هرحال: $G-B=\sum_{(A_K,A_L)\in S}(D_L-D_K)=h=1$

اکنون با جایگذاری مقادیر D_K, D_L به صورت زیر خواهیم داشت:

$$D_L-D_K=\sum W_j\left(V_{Lj}-V_j^*\right)^2-\sum W_j\left(V_{kj}-V_j^*\right)^2$$
$$=\sum W_j\left(V_{Lj}^2+V_j^{*2}-2V_{Lj}V_j^*\right)-\sum W_j\left(V_{Kj}^2+V_j^{*2}-2V_{kj}V_j^*\right)$$
$$=\sum W_jV_{Lj}^2+\sum W_jV_j^{*2}-2\sum W_jV_{Lj}V_j^*-\sum W_jV_{kj}^2-\sum W_jV_j^{*2}+2\sum W_jV_{kj}V_j^*$$
$$=\sum_{(A_K,A_L)\in S}W_j\left(V_{Lj}^2-V_{kj}^2\right)-2\sum W_jV_j^*\left(V_{Lj}-V_{kj}\right)$$

توجه داریم که V_{kj}^2, V_{Lj}^2 پارامتر هستند لذا علیرغم اینکه از توان دوم هستند به خطی بودن مدل لطمه وارد نمی‌کنند ولی متغیرهای W_j, V_j^* چون در هم ضرب شده‌اند مدل از حالت خطی خارج می‌شود.

برای رفع این نقصان $W_j.V_j^*=u_j$ فرض می‌کنیم لذا خواهیم داشت:

$$D_L-D_K=\sum_{(A_K,A_L)\in S}^{n}W_j\left(V_{Lj}^2-V_{kj}^2\right)-2\sum_{(A_K,A_L)\in S}^{n}u_j\left(V_{Lj}-V_{kj}\right)$$

بدیهی است در رابطه فوق چنانچه u_j, w_j معلوم شوند به راحتی $V_j^*=\frac{u_j}{w_j}$ نیز معلوم خواهد شد با این حساب محدودیت مربوط به $G-B=h=1$ به صورت زیر خواهد بود.[1]

$$G-B=1\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\left(D_L-D_K\right)=1$$
$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}W_j\sum_{(A_K,A_L)\in S}^{n}\left(V_{Lj}^2-V_{kj}^2\right)-2\sum_{j=1}^{n}u_j\sum_{(A_K,A_L)\in S}^{n}\left(V_{Lj}-V_{kj}\right)=1$$

(محدودیت غیربدیهی)

از آنجاییکه برای هر $(A_K, A_L)\in S$ شرط $D_K\le D_L$ فرض می‌شود و $\varphi(A_K, A_L)\ge 0$ است، بدیهی است که $\varphi(A_K, A_L)\ge D_K-D_L$، لذا

[1] توجه داشته باشید که در $G-B$ دو $\sum$ فعال خواهند شد.

محدودیت $(D_L - D_K) + \varphi(A_K, A_L) \geq 0$ یعنی:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j\left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j\left(V_{Lj} - V_{kj}\right) + \varphi(A_K, A_L) \geq 0$$

(محدودیت بدیهی)

محدودیت بدیهی مدل به حساب خواهد آمد.

۳) مدل "LP" کامل مسئله را به صورت زیر ارائه می‌دهیم.

$$\min B = \sum_{(A_K, A_L)\in S}^{n} \varphi(A_K, A_L)$$

$$s.t: \sum_{j=1}^{n} W_j\left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j\left(V_{Lj} - V_{kj}\right) + \varphi(A_K, A_L) \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_j \sum_{(A_K, A_L)\in S}^{n} \left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{(A_K, A_L)\in S}^{n} \left(V_{Lj} - V_{kj}\right) = 1$$

$\varphi(A_K, A_L) \geq 0, (A_K, A_L) \in S, W_j \geq 0, u_j$: آزاد در علامت

- **قدم چهارم**- مدل را به روش مناسب حل کرده جوابها را استخراج می‌کنیم.

جوابهای مدل فوق را با توجه به u_j^*, w_j^* های نهایی و بهینه حاصله به صورت زیر می‌نویسیم.

$$1)\ if \quad w_j^* > 0 \Rightarrow v_j^* = \frac{u_j^*}{w_j^*}$$

که در این حالت فواصل از ایده‌آل به راحتی قابل محاسبه، و رتبه‌بندی بدون مشکل انجام می‌شود.

$$2)\ if \quad w_j^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_j^* = 0 \Rightarrow v_j^* = \text{مبهم} \\ u_j^* > 0 \Rightarrow v_j^* = +\infty \\ u_j^* < 0 \Rightarrow v_j^* = -\infty \end{cases}$$

حالات فوق در مسائل عملی کمتر رخ می‌دهند. علی‌ایحال جهت پاسخگو بودن مدل در وضعیت مبهم، $v_j^* = 0$ فرض می‌شود و برای $w_j^* \geq 0$ فاصله تا ایده‌آل محاسبه می‌شود.

در وضعیت‌های $\pm\infty$ نیز اندیس جدید j' را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$j' = \{ j \mid w_j^* = 0, u_j^* \neq 0 \}$$

که در آنصورت با توجه به $w_j = 0$ خواهیم داشت:

$$D_i = -2 \sum_{j'=1}^{n} u_{j'}^* . v_{ij'}$$

- **قدم پنجم**- رتبه‌بندی گزینه‌ها.

با توجه به جوابهای حاصل از مدل، با داشتن u_j^* ها و w_j^* ها، v_j^*ها را محاسبه و سپس مختصات نقطه یا گزینه بهینه یعنی A^* را معلوم و آنگاه فواصل تا گزینه بهینه با ایده‌آل یعنی $\overline{A_i A^*} = d_i$ را نیز محاسبه و در پایان گزینه‌ها را رتبه‌بندی می‌کنیم.

مثال ٤) جدول ارزش‌گذاری شده با چهار گزینه و دو شاخص به صورت زیر مفروض است.

شاخص / گزینه	C_1	C_2
A_1	4	2
A_2	2	8
A_3	1	2
A_4	6	0

با استفاده از روش لینمپ **(LINMAP)** اوزان شاخص‌ها را محاسبه و سپس گزینه‌ها را رتبه‌بندی کنید.

حل:

- **قدم اول**- ماتریس تصمیم V را با اعداد ارزشی مثبت صحیح ارائه شده به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \\ 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **قدم دوم**- مجموعه قضاوت زوجی DM را با حداقل $C_4^2 = 6$ عضو به

صورت زیر فرض می‌کنیم.[1]

$$S = \{(A_1, A_2), (A_3, A_1), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_4, A_2), (A_3, A_4)\}$$

• **قدم سوم**- مدل ریاضی برنامه‌ریزی خطی "LP" مسئله را به صورت زیر فراهم می‌کنیم.

۱) هدف مدل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\min B = \sum_{(A_K, A_L)\in S} \varphi(A_K, A_L) = \sum_{(A_K, A_L)\in S} Max\{0, (D_K - D_L)\}$$

۲) محدودیت‌های بدیهی مدل را به تعداد عضوهای S با رابطه کلی زیر تشکیل می‌دهیم.

$$= \varphi(A_1, A_2) + \varphi(A_3, A_1) + \varphi(A_1, A_4) + \phi(A_2, A_3) + \varphi(A_4, A_2) + \phi(A_3, A_4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_j (V_{lj}^2 - V_{kj}^2) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j (V_{lj} - V_{kj}) + \varphi(A_K, A_L) \geq 0$$

• برای $\varphi(A_1, A_2)$:

$$\left[W_1 (V_{21}^2 - V_{11}^2) + W_2 (V_{22}^2 - V_{12}^2)\right] - 2\left[u_1 (V_{21} - V_{11}) + u_2 (V_{22} - V_{12})\right] + \varphi(A_1, A_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left[W_1 (2^2 - 4^2) + W_2 (8^2 - 2^2)\right] - 2\left[u_1 (2 - 4) + u_2 (8 - 2)\right] + \varphi(A_1, A_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow -12W_1 + 60W_2 + 4u_1 - 12u_2 + \varphi(A_1, A_2) \geq 0$$

• برای $\varphi(A_3, A_1)$:

$$\left[W_1 (V_{11}^2 - V_{31}^2) + W_2 (V_{12}^2 - V_{32}^2)\right] - 2\left[u_1 (V_{11} - V_{31}) + u_2 (V_{12} - V_{32})\right] + \varphi(A_3, A_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left[W_1 (4^2 - 1^2) + W_2 (2^2 - 2^2)\right] - 2\left[u_1 (4 - 1) + u_2 (2 - 2)\right] + \varphi(A_3, A_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow +15W_1 + 0W_2 - 6u_1 + 0u_2 + \varphi(A_3, A_1) \geq 0$$

• برای $\varphi(A_1, A_4)$:

$$\left[W_1 (V_{41}^2 - V_{11}^2) + W_2 (V_{42}^2 - V_{12}^2)\right] - 2\left[u_1 (V_{41} - V_{11}) + u_2 (V_{42} - V_{12})\right] + \varphi(A_1, A_4) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left[W_1 (6^2 - 4^2) + W_2 (0^2 - 2^2)\right] - 2\left[u_1 (6 - 4) + u_2 (0 - 2)\right] + \varphi(A_1, A_4) \geq 0$$

$$\Rightarrow +20W_1 - 4W_2 - 4u_1 + 4u_2 + \varphi(A_1, A_4) \geq 0$$

---

[1] توجه شود که اگر گزینه‌ها زیاد باشند، بطور یقیین خطای قضاوت DM در مقایسات زوجی زیاد خواهد بود.

• برای $\varphi(A_2, A_3)$:

$$\left[W_1\left(V_{31}^2 - V_{21}^2\right) + W_2\left(V_{32}^2 - V_{22}^2\right)\right] - 2\left[u_1\left(V_{31} - V_{21}\right) + u_2\left(V_{32} - V_{22}\right)\right] + \varphi\left(A_2, A_3\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow \left[W_1\left(1^2 - 2^2\right) + W_2\left(2^2 - 8^2\right)\right] - 2\left[u_1(1-2) + u_2(2-8)\right] + \varphi\left(A_2, A_3\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow -3W_1 - 60W_2 + 2u_1 + 12u_2 + \varphi\left(A_2, A_3\right) \geq 0$$

• برای $\varphi(A_4, A_2)$:

$$\left[W_1\left(V_{21}^2 - V_{41}^2\right) + W_2\left(V_{22}^2 - V_{42}^2\right)\right] - 2\left[u_1\left(V_{21} - V_{41}\right) + u_2\left(V_{22} - V_{42}\right)\right] + \phi\left(A_4, A_2\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow \left[W_1\left(2^2 - 6^2\right) + W_2\left(8^2 - 0^2\right)\right] - 2\left[u_1(2-6) + u_2(8-0)\right] + \varphi\left(A_4, A_2\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow -32W_1 + 64W_2 + 8u_1 - 16u_2 + \varphi\left(A_4, A_2\right) \geq 0$$

• برای $\varphi(A_3, A_4)$:

$$\left[W_1\left(V_{41}^2 - V_{31}^2\right) + W_2\left(V_{42}^2 - V_{32}^2\right)\right] - 2\left[u_1\left(V_{41} - V_{31}\right) + u_2\left(V_{42} - V_{32}\right)\right] + \varphi\left(A_3, A_4\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow \left[W_1\left(6^2 - 1^2\right) + W_2\left(0^2 - 2^2\right)\right] - 2\left[u_1(6-1) + u_2(0-2)\right] + \varphi\left(A_3, A_4\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow +35W_1 - 4W_2 - 10u_1 + 4u_2 + \varphi\left(A_3, A_4\right) \geq 0$$

۳) محدودیت غیربدیهی مدل را با رابطه زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j \sum_{(A_K, A_L)\in S}^{n} \left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{(A_K, A_L)\in S}^{n} \left(V_{Lj} - V_{kj}\right) = 1$$

$$W_1\begin{bmatrix}\left(V_{21}^2 - V_{11}^2\right) + \left(V_{11}^2 - V_{31}^2\right) + \left(V_{41}^2 - V_{11}^2\right) + \left(V_{31}^2 - V_{21}^2\right) + \\ \left(V_{21}^2 - V_{41}^2\right) + \left(V_{41}^2 - V_{31}^2\right)\end{bmatrix}$$
$$+W_2\begin{bmatrix}\left(V_{22}^2 - V_{12}^2\right) + \left(V_{12}^2 - V_{32}^2\right) + \left(V_{42}^2 - V_{12}^2\right) + \left(V_{32}^2 - V_{22}^2\right) + \\ \left(V_{22}^2 - V_{42}^2\right) + \left(V_{42}^2 - V_{32}^2\right)\end{bmatrix}$$
$$-2u_1\begin{bmatrix}\left(V_{21} - V_{11}\right) + \left(V_{11} - V_{31}\right) + \left(V_{41} - V_{11}\right) + \left(V_{31} - V_{21}\right) + \\ \left(V_{21} - V_{41}\right) + \left(V_{41} - V_{31}\right)\end{bmatrix}$$
$$-2u_2\begin{bmatrix}\left(V_{22} - V_{12}\right) + \left(V_{12} - V_{32}\right) + \left(V_{42} - V_{12}\right) + \left(V_{32} - V_{22}\right) + \\ \left(V_{22} - V_{42}\right) + \left(V_{42} - V_{32}\right)\end{bmatrix} = 1$$
$$\Rightarrow W_1\left(-V_{11}^2 + V_{21}^2 - V_{31}^2 + V_{41}^2\right) + W_2\left(-V_{12}^2 + V_{22}^2 - V_{32}^2 + V_{42}^2\right)$$
$$-2u_1\left(-V_{11} + V_{21} - V_{31} + V_{41}\right) - 2u_2\left(-V_{12} + V_{22} - V_{32} + V_{42}\right)$$

$$\Rightarrow W_1\left(-4^2+2^2-1^2+6^2\right)+W_2\left(-2^2+8^2-2^2+0^2\right)$$
$$-2u_1\left(-4+2-1+6\right)-2u_2\left(-2+8-2+0\right)=1$$
$$\Rightarrow 23W_1+56W_2-6u_1-8u_2=1$$ محدودیت غیربدیهی

۳) مدل کامل مسئله را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$\min B=\varphi\left(A_1,A_2\right)+\varphi\left(A_3,A_1\right)+\varphi\left(A_1,A_4\right)+\varphi\left(A_2,A_3\right)+\varphi\left(A_4,A_2\right)+\varphi\left(A_3,A_4\right)$$
$$s.t: -12W_1+60W_2+4u_1-12u_2+\varphi\left(A_1,A_2\right)\geq 0$$
$$+15W_1+0W_2-6u_1+0u_2+\varphi\left(A_3,A_1\right)\geq 0$$
$$20W_1-4W_2-4u_1+4u_2+\varphi\left(A_1,A_4\right)\geq 0$$
$$-3W_1-60W_2+2u_1+12u_2+\varphi\left(A_2,A_3\right)\geq 0$$
$$-32W_1+64W_2+8u_1-16u_2+\varphi\left(A_4,A_2\right)\geq 0$$
$$35W_1-4W_2-10u_1+4u_2+\varphi\left(A_3,A_2\right)\geq 0$$
$$23W_1+56W_2-6u_1-8u_2=1$$
$w_j\geq 0, u_j$ و آزاد در علامت $\left(A_K,A_L\right)\in S, \varphi\left(A_K,A_L\right)$
$j=1,2$
$K,L=1,2,3,4$

- **قدم چهارم**- حل مدل و استخراج جواب‌ها

مدل فوق را با نرم افزار Win Q.S.B یا هر نرم افزار مناسب دیگری حل می‌کنیم.

جواب‌ها به صورت زیر می‌باشند.

$$W_1^*=0.0541 \qquad W_2^*=0.0101 \qquad ,u_1^*=0.1351 \qquad ,u_2^*=0$$
$$\varphi\left(A_2,A_3\right)=0.5$$
$$\varphi\left(A_1,A_2\right)=\varphi\left(A_1,A_3\right)=\varphi\left(A_1,A_4\right)=\varphi\left(A_4,A_2\right)=\varphi\left(A_3,A_4\right)=0$$

- **قدم پنجم**- رتبه‌بندی گزینه‌ها

ابتدا به کمک w_j^* ها و u_j^* ها مقادیر v_j^*ها را از رابطه $V_j^*=\frac{u_j^*}{w_j^*}$ محاسبه می‌کنیم.

$$\Rightarrow V_1^*=\frac{u_1^*}{w_1^*}=\frac{0.1351}{0.0541}\Rightarrow V_1^*=2.5$$
$$V_2^*=\frac{u_2^*}{w_2^*}=\frac{0}{0.0101}\Rightarrow V_2^*=0$$
$$\Rightarrow A^*=\left(2.5,0\right)$$

حال D_i ها را برای هر گزینه از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم.

$$D_i=\sum_{j=1}^{n} W_j\left(V_{ij}-V_j^*\right)^2, i=1,2,\dots,m$$

$$D_1=\sum_{j=1}^{2} W_j\left(V_{1j}-V_j^*\right)^2$$
$$=W_1\left(V_{11}-V_1^*\right)^2+W_2\left(V_{12}-V_2^*\right)^2$$
$$=0.0541(4-2.5)^2+0.0101(2-0)^2$$
$$=0.1621$$
$$\Rightarrow D_1=0.1621$$ مجذوز فاصله A_1 تا A^*

$$D_2=W_1\left(V_{21}-V_1^*\right)^2+W_2\left(V_{22}-V_2^*\right)^2$$
$$=0.0541(2-2.5)^2+0.0101(8-0)^2$$
$$\Rightarrow D_2=0.6599$$ مجذوز فاصله A_2 تا A^*

$$D_3=W_1\left(V_{31}-V_1^*\right)^2+W_2\left(V_{32}-V_2^*\right)^2$$
$$=0.0541(1-2.5)^2+0.0101(2-0)^2$$
$$\Rightarrow D_3=0.5257$$ مجذوز فاصله A_3 تا A^*

$$D_4=W_1\left(V_{41}-V_1^*\right)^2+W_2\left(V_{42}-V_2^*\right)^2$$
$$=0.0541(6-2.5)^2+0.0101(0-0)^2$$
$$\Rightarrow D_4=0.6627$$ مجذوز فاصله A_4 تا A^*

$$\Rightarrow D=\{0.1621,0.6599,0.5257,0.6627\}$$
$$\Rightarrow A_1>A_3>A_2>A_4$$

توجه داشته باشیم که این نتیجه‌گیری با توجه به $A^*(2.5,0)$ است لذا از روی ظاهر ماتریس V در این روش نمی‌توان قضاوت کرد. همانطور که قبلا نیز اشاره شد مختصات A^* با هیچکدام از گزینه‌ها یکی نیست ولی مناسب‌ترین گزینه برای مسئله آنهم بصورت ایده‌آل است.

توجه- چنانچه DM در مقایسات زوجی هیچ خطایی مرتکب نشود به احتمال زیاد وزن شاخص‌ها دیگر هیچ کمکی نخواهند کرد و چه بسا پس از حل مدل صفر شوند در اینصورت با استفاده از اصل تراگذاری رجحان‌ها را تعمیم داده، گزینه‌ها را رتبه‌بندی می کنیم. که البته با تعداد زیاد گزینه ها و به ویژه شاخص ها این خطا اجتناب ناپذیر است.

برای رفع شبهه در محاسبات و داده‌های لینمپ چند مثال ساده ولی متمایز در زیر ارائه می‌شود.

مثال ۱–٤) سه گزینه و دو شاخص با داده‌های زیر مفروضند

شاخص / گزینه	C_1	C_2
A_1	9	8
A_2	3	2
A_3	1	2

گزینه‌ها را به روش لینمپ رتبه‌بندی کنید.

حل: مجموعه رتبه‌ها را با سه وضعیت مختلف توسط DM و با این ذهنیت که هر چه مولفه های مختصاتی قوی تر باشند بهتر است[1]، به شرح زیر ارائه می‌دهیم.

الف) فرض کنید $S = \{(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3)\}$ باشد همانطور که مشاهده می‌شود از دید DM هر چه مختصات بیشتر باشند گزینه نیز بهتر است و ظاهرا هیچ خطایی نیز رخ نداده است یعنی اصل تراگذاری نیز رعایت شده است لذا **ضمن آگاهی از جواب مدل**، بدون شرح جزئیات، جهت حل با آلگوریتم لینمپ مدل LP را تشکیل می‌دهیم.

۱) تابع هدف مدل را می‌نویسیم:

$$\min B = \sum_{(A_K, A_L)\in S} \varphi(A_K, A_L) = \sum_{(A_K, A_L)\in S} Max\{0, (D_K - D_L)\}$$
$$= \varphi(A_1, A_2) + \varphi(A_1, A_3) + \varphi(A_2, A_3)$$

۲) محدودیت‌های بدیهی مدل را بدست می‌آوریم.

$$\sum_{j=1}^{n} W_j\left(V_{lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j\left(V_{lj} - V_{kj}\right) + \varphi(A_K, A_L) \geq 0$$

○ برای $\varphi(A_1, A_2)$:

$$\left[W_1(3^2 - 9^2) + W_2(2^2 - 8^2)\right] - 2\left[u_1(3-9) + u_2(2-8)\right] + \varphi(A_1, A_2) \geq 0$$

[1] توجه شود که در لینمپ همیشه مختصات بالاتر برتر نیستند بلکه موقعیت جغرافیائی نقاط از نظر DM مهم وتعیین کننده هستند که در مجموعه S نمود پیدا می کند.

$$\Rightarrow -72W_1 - 60W_2 + 12u_1 - 12u_2 + \varphi(A_1, A_2) \geq 0$$

○ برای $\varphi(A_1, A_3)$:

$$[W_1(1^2 - 9^2) + W_2(2^2 - 8^2)] - 2[u_1(1-9) + u_2(2-8)] + \varphi(A_1, A_3) \geq 0$$
$$\Rightarrow -80W_1 - 60W_2 + 16u_1 + 12u_2 + \varphi(A_1, A_3) \geq 0$$

○ برای $\varphi(A_2, A_3)$:

$$\Rightarrow [W_1(1^2 - 3^2) + W_2(2^2 - 2^2)] - 2[u_1(1-3) + u_2(2-2)] + \varphi(A_2, A_3) \geq 0$$
$$\Rightarrow -8W_1 - 0W_2 + 4u_1 + 0u_2 + \varphi(A_2, A_3) \geq 0$$

۳) محدودیت غیربدیهی مدل را با رابطه زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j \sum_{(A_K, A_L) \in S}^{n} \left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{(A_K, A_L) \in S}^{n} \left(V_{Lj} - V_{kj}\right) = 1$$
$$W_1[(3^2 - 9^2) + (1^2 - 9^2) + (1^2 - 3^2)] + W_2[(2^2 - 8^2) + (2^2 - 8^2) + (2^2 - 2^2)]$$
$$- 2u_1[(3-9) + (1-9) + (1-3)] - 2u_2[(2-8) + (2-8) + (2-2)] = 1$$
$$\Rightarrow -160W_1 - 120W_2 + 32u_1 + 24u_2 = 1$$

لذا مدل کامل مسئله به صورت زیر است:

$$\min B = \varphi(A_1, A_2) + \varphi(A_1, A_3) + \varphi(A_2, A_3)$$
$$s.t: -72W_1 - 60W_2 + 12u_1 + 12u_2 + \varphi(A_1, A_2) \geq 0$$
$$-80W_1 - 60W_2 + 16u_1 + 12u_2 + \varphi(A_1, A_3) \geq 0$$
$$-8W_1 + 0W_2 + 4u_1 + 0u_2 + \varphi(A_2, A_3) \geq 0$$
$$-160W_1 - 120W_2 + 32u_1 + 24u_2 = 1$$

$w_1, w_2 \geq 0, u_1, u_2$: آزاد در علامت و $K, L = 1,2,3,4$ $\varphi(A_K, A_L) \geq 0$

جواب‌های مدل فوق نیز به صورت زیر می‌باشند.

$$w^* = (0,0) \qquad , u^* = (0.0313, 0) \qquad , B^* = 0$$

همانطور که مشاهده می‌شود هیچگونه اولویت وزنی وجود ندارد از طرفی DM هیچ خطایی نیز مرتکب نشده بنابراین شرط تراگذاری در قضاوت وی نیز رعایت شده است یعنی از دید DM :

$$A_1 > A_2, A_1 > A_3, A_2 > A_3 \Rightarrow A_1 > A_2 > A_3$$

توجه داریم چون DM نیزخطامرتکب نشده رتبه‌بندی با نظراوتطابق دارد.

ب) حال فرض کنید $S = \{(A_2, A_1), (A_1, A_3), (A_3, A_2)\}$ باشد مدل کلی مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$\min B = \varphi(A_2, A_1) + \varphi(A_1, A_3) + \varphi(A_3, A_2)$$

$$s.t: +72W_1 + 60W_2 - 12u_1 - 12u_2 + \varphi(A_2, A_1) \geq 0$$

$$-80W_1 - 60W_2 + 16u_1 + 12u_2 + \varphi(A_1, A_3) \geq 0$$

$$+8W_1 + 0W_2 - 4u_1 + 0u_2 + \varphi(A_3, A_2) \geq 0$$

$$80W_1 + 0W_2 + 16u_1 + 0u_2 = 1$$

$w_1, w_2 \geq 0, u_1, u_2$: و آزاد در علامت $\varphi(A_K, A_L) \geq 0$

که پس از حل مدل خواهیم داشت:

$$W^* = (0.0089,0) \qquad u^* = (0.0179,0.0357) \qquad ,B^* = 0$$

یعنی با اوزان فوق میزان خطا دیگر قابل ملاحظه نیست و صفر می‌شود.

$$W_1^* = 0.0089 \Rightarrow V_1^* = \frac{u_1^*}{W_1^*} = \frac{0.0179}{0.0089} \Rightarrow V_1^* = 2.01$$

چون $u_2^* > 0, W_2^* = 0$ شده است $V_2^* \to +\infty$ بنابراین نمی‌توان مختصات دقیق A^* را بدست آورد، ولی همانطور که ذکر شد فواصل را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$W_2^* = 0 \qquad \wedge \qquad u_2^* > 0 \Rightarrow J' = \{J \mid W_J^* = 0, u_J \neq 0\} = \{2\}$$

$$\Rightarrow D_i = -2\sum_{J'} u_{J'}^* . V_{iJ'}$$

$$D_1 = \overline{A_1 A^*} = -2\left(u_2^* V_{12}\right)$$

$$= -2(0.0357 \times 8) \quad \Rightarrow D_1 = -0.5712$$

$$D_2 = \overline{A_2 A^*} = -2\left(u_2^* V_{22}\right)$$

$$= -2(0.0357 \times 2) \Rightarrow D_2 = -0.1428$$

$$D_3 = \overline{A_3 A^*} = -2\left(u_2^* V_{32}\right)$$

$$= -2(0.0357 \times 8) \Rightarrow D_3 = 0.1428$$

$$\Rightarrow A_3 = A_2 > A_1$$

همانطور که مشاهده می‌شود علیرغم اینکه گزینه A_1 عملا از دید دو شاخص بالاتر از A_3, A_2 است، رتبه سوم شده است، که این نیز با توجه به نظر DM دور از انتظار نیست، زیرا DM به برتری مطلق A_1 معتقد نبوده است.

نتیجه– قبلا نیز تاکید جدی کردیم که در لینمپ، گزینه‌ها همانند m نقطه در فضای n بعدی هستند لذا موقعیت مختصاتی گزینه‌ها از دید DM مهم هستند ولی اگر تعداد گزینه‌ها زیاد باشند خطای ناشی از قضاوت زوجی DM نیز افزایش می‌یابد لذا مدل درصدد است اوزانی را معلوم کند که مجموع خطای DM حداقل گردد. تصور کنید در یک منطقه بزرگ شهری m فروشگاه زنجیره‌ای با موقعیت‌های متفاوت فعال هستند، با روش لینمپ بطور مناسب می‌شود فروشگاه‌ها را رتبه‌بندی نمود، لذا در چنین شرایطی هیچ دلیلی ندارد که مثلا فروشگاه دوم با موقعیت $A_2(50,60)$ بهتر از فروشگاه پنجم با موقعیت $A_5(10,25)$ باشد هر چند از دید هر دو شاخص یا به عبارت بهتر دو محور مختصات موقعیت بالاتری دارد. به همین دلیل برای مسائلی که شاخص‌ها اولویت افزایشی یا کاهشی همانند سود و هزینه دارند، این روش توصیه نمی‌شود، به خصوص که شاخص‌ها زیاد هم باشند.

مثال ۲–٤) دو گزینه و دو شاخص با مختصات زیر مفروضند:

شاخص / گزینه	C_1	C_2
A_1	6	9
A_2	5	4

$, S = \{(A_2, A_1)\}$

با روش **لینمپ** و با توجه به نظر DM آنها را رتبه‌بندی کنید.

حل: با توجه به سادگی مسئله بدون شک انتظار می‌رود که با توجه به نظر DM علیرغم اینکه ارزش مختصات A_1 از A_2 بیشتر است،گزینه A_2 برگزینه A_1 ارجحیت داشته باشد. علی‌ایحال مسئله را با آلگوریتم لینمپ نیز حل می‌کنیم.

حل:

- **قدم اول**- تابع هدف مدل را به صورت $\min B = \varphi(A_2, A_1)$ می‌نویسیم.
- **قدم دوم**- محدودیت بدیهی مدل را بدست می‌آوریم.

$$\sum_{j=1}^{n} W_j\left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j\left(V_{Lj} - V_{kj}\right) + \varphi\left(A_K, A_L\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} W_j\left(V_{1j}^2 - V_{2j}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j\left(V_{1j} - V_{2j}\right) + \varphi\left(A_2, A_1\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow\left[W_1\left(V_{11}^2 - V_{21}^2\right) + W_2\left(V_{12}^2 - V_{22}^2\right)\right] - 2\left[u_1\left(V_{11} - V_{21}\right) + u_2\left(V_{12} - V_{22}\right)\right] + \varphi\left(A_2, A_1\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow\left[W_1\left(6^2 - 5^2\right) + W_2\left(9^2 - 4^2\right)\right] - 2\left[u_1(6-5) + u_2(9-4)\right] + \varphi\left(A_2, A_1\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow 11W_1 + 65W_2 - 2u_1 - 10u_2 + \varphi\left(A_2, A_1\right) \geq 0$$

- **قدم سوم**- محدودیت غیربدیهی مدل را با رابطه زیر می‌نویسیم.

$$\sum_{j=1}^{n} W_j \sum_{(A_K, A_L)\in S} \left(V_{Lj}^2 - V_{kj}^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{(A_K, A_L)\in S} \left(V_{Lj} - V_{kj}\right) = 1$$
$$W_1\left[\left(V_{11}^2 - V_{21}^2\right)\right] + W_2\left[\left(V_{12}^2 - V_{22}^2\right)\right] - 2u_1\left[\left(V_{11} - V_{21}\right)\right] - 2u_2\left[\left(V_{12} - V_{22}\right)\right] = 1$$
$$\Rightarrow W_1\left[\left(6^2 - 5^2\right)\right] + W_2\left[\left(9^2 - 4^2\right)\right] - 2u_1\left[(6-5)\right] - 2u_2\left[(9-4)\right] = 1$$
$$\Rightarrow 11W_1 + 65W_2 - 2u_1 - 10u_2 = 1$$

- **قدم چهارم**- مدل کلی مساله را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$\min B = \varphi\left(A_2, A_1\right)$$
$$s.t: 11W_1 + 65W_2 - 2u_1 - 10u_2 + \varphi\left(A_2, A_1\right) \geq 0$$
$$11W_1 + 65W_2 - 2u_1 - 10u_2 = 1$$
$w_1, w_2 \geq 0, u_1, u_2 :$ و آزاد در علامت $\varphi\left(A_2, A_1\right) \geq 0$

با توجه به محدودیت دوم بدون حل مدل با نرم افزار ، هم بدیهی است $B^* = \varphi\left(A_2, A_1\right) = 0$ لذا $A_2 > A_1$ است.

جواب نرم افزار نیز به صورت زیر است:

$$W^* = (0.00154) \qquad u^* = (0,0) \qquad ,\varphi = \left(A_2, A_1\right) = 0 \Rightarrow A_2 > A_1$$

توجه- چنانچه DM مجموعه $S = \{(A_1, A_2)\}$, را ارائه میداد نیز بدیهی بـود

که $\varphi(A_1,A_2)=0$ شود و $A_1 > A_2$ باشد.

نتیجه نهائی– با توجه به اینکه در **لینمپ** گزینه ها مجموعه نقاطی در فضای مختصاتی E^n هستند، مدل جوابی را ارائه می‌دهد که در آن DM حداقل خطا را مرتکب شده باشد. در مسائل واقعی که گزینه‌ها زیاد هستند بدیهی است که DM نیز خطا مرتکب می‌شود، لذا اولویت مدل تامین نظر DM با حداقل خطا می‌باشد. آنچه حائز اهمیت است اینکه در مدل های پر حجم DM هم قبل از حل نتیجه نهائی را نمی داند.