مثالهای مهم از مبحث برنامه‌ریزی پویا

با توجه به این‌که چارچوب استاندارد و مشخصی برای فرموله کردن مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد و در هر مورد معادلات و روابط ریاضی مخصوصی که با شرایط آن مسأله تطبیق می‌نماید نوشته شود. در این‌جا مثال‌های متنوعی[۱] بیان می‌شوند تا هرچه بهتر مفاهیم برنامه‌ریزی پویا مشخص گردند.

مثال ۱. یک حزب سیاسی مشغول برنامه‌ریزی تبلیغات انتخابات برای یک منطقه‌ی خاص می‌باشد. این حزب می‌تواند برای ۴ حوزه‌ی انتخاباتی در منطقه‌ی مربوطه، از ۶ دستیار استفاده کند. مسئول حزب در منطقه، مایل است این افراد را طوری به ۴ حوزه بفرستد که حداکثر کارائی حاصل شود. با توجه به این‌که اگر یک دستیار در بیش از یک حوزه فعالیت نماید کارائی او کاهش می‌یابد لذا هر دستیار حداکثر به یک حوزه اختصاص می‌یابد. هم‌چنین امکان این امر وجود دارد که به یک حوزه، فردی اختصاص نیابد. طبق برآوردهای صورت گرفته، افزایش تعداد آرای نامزدهای هر حزب در هر حوزه با توجه به تعداد دستیاران در هر حوزه به شرح جدول زیر می‌باشد. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، چند دستیار به هر حوزه گمارده شود تا حداکثر افزایش در تعداد آرای کل ۴ حوزه به‌دست آید؟

تعداد دستیار \ حوزه	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۴	۷	۵	۶
۲	۹	۱۱	۱۰	۱۱
۳	۱۵	۱۶	۱۵	۱۴
۴	۱۸	۱۸	۱۸	۱۶
۵	۲۱	۲۰	۲۱	۱۷
۶	۲۴	۲۱	۲۲	۱۸

پاسخ:

تعاریف اساسی در حل با استفاده از برنامه‌ریزی پویا:

۱- **مرحله:** هر حوزه بیان‌گر یک مرحله می‌باشد.

۲- **متغیر وضعیت (حالت):** تعداد دستیارانی که هنوز اختصاص پیدا نکرده‌اند. (مسأله سرمایه‌گذاری را به یاد بیاورید.)

۳- **متغیر تصمیم:** چه تعداد دستیار در مرحله‌ی i به حوزه‌ی iام اختصاص یابد.

۴- **هدف:** بیشینه کردن تعداد کل آراء در هر ۴ حوزه

۱- بخشی از مثال‌های این قسمت از کتاب‌های مرجع انتخاب شده‌اند.

مرحله‌ی ۴: حوزه چهارم

$x_۴$ \ $s_۴$	تابع برگشتی ۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$f^*_{(x_۴)}$	$x^*_۴$
۰	۰	–	–	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰	۶	–	–	–	–	–	۶	۱
۲	۰	۶	۱۱	–	–	–	–	۱۱	۲
۳	۰	۶	۱۱	۱۴	–	–	–	۱۴	۳
۴	۰	۶	۱۱	۱۴	۱۶	–	–	۱۶	۴
۵	۰	۶	۱۱	۱۴	۱۶	۱۷	–	۱۷	۵
۶	۰	۶	۱۱	۱۴	۱۶	۱۷	۱۸	۱۸	۶

مرحله‌ی ۳: دوره‌ی سوم

$x_۳$ \ $s_۳$	تابع برگشتی ۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$f^*_{(x_۳)}$	$x^*_۳$
۰	۰+۰	–	–	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰+۶	۵+۰	–	–	–	–	–	۶	۰
۲	۰+۱۱	۵+۶	۱۰+۰	–	–	–	–	۱۱	۰ یا ۱
۳	۰+۱۴	۵+۱۱	۱۰+۶	۱۵+۰	–	–	–	۱۶	۱ یا ۲
۴	۰+۱۶	۵+۱۴	۱۰+۱۱	۱۵+۶	۱۸+۰	–	–	۲۱	۲ یا ۳
۵	۰+۱۷	۵+۱۶	۱۰+۱۴	۱۵+۱۱	۱۸+۶	۲۱+۰	–	۲۶	۳
۶	۰+۱۸	۵+۱۷	۱۰+۱۶	۱۵+۱۴	۱۸+۱۱	۲۱+۶	۲۲+۰	۲۹	۳ یا ۴

مرحله‌ی ۲: حوزه‌ی دوم

$x_۲$ / $s_۲$	تابع برگشتی								
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$f^*_{(x_۲)}$	$x^*_۲$
۰	۰+۰	−	−	−	−	−	−	۰	۰
۱	۰+۶	۷+۰	−	−	−	−	−	۷	۱
۲	۰+۱۱	۷+۶	۱۱+۰	−	−	−	−	۱۳	۱
۳	۰+۱۶	۷+۱۱	۱۱+۶	۱۶+۰	−	−	−	۱۸	۱
۴	۰+۲۱	۷+۱۶	۱۱+۱۱	۱۶+۶	۱۸+۰	−	−	۲۳	۱
۵	۰+۲۶	۷+۲۱	۱۱+۱۶	۱۶+۱۱	۱۸+۶	۲۰+۰	−	۲۸	۱
۶	۰+۲۹	۷+۲۶	۱۱+۲۱	۱۶+۱۶	۱۸+۱۱	۲۰+۶	۲۱+۰	۳۳	۱

مرحله‌ی ۱: حوزه‌ی ۱

$x_۱$ / $s_۱$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$f^*_{(x_۱)}$	$x^*_۱$
۶	۰+۳۳	۴+۲۸	۹+۲۳	۱۵+۱۸	۱۸+۱۳	۲۱+۷	۲۴+۰	۳۳	۰ یا ۳

پس سیاست بهینه به صورت زیر است:

توجه: مسأله دارای جواب بهینه‌ی چندگانه می‌باشد.

حالت اول: حوزه‌ی اول = صفر دستیار – حوزه‌ی دوم: ۱ دستیار

حوزه‌ی سوم: ۳ دستیار – حوزه‌ی چهارم: ۲ دستیار

حالت دوم: حوزه‌ی ۱: ۳ دستیار – حوزه‌ی دوم: ۱ دستیار،

حوزه‌ی سوم: ۱ دستیار – حوزه‌ی چهارم: ۱ دستیار

حالت سوم: حوزه‌ی اول: ۳ دستیار – حوزه‌ی دوم: ۱ دستیار

حوزه‌ی سوم: صفر دستیار – حوزه‌ی چهارم: ۲ دستیار

مثال ۲. مدیر فروش یک ناشر کتاب‌های دانشگاهی، ۶ فروشنده در اختیار دارد که می‌تواند آن‌ها را به ۳ ناحیه‌ی مختلف اعزام نماید. تصمیم او بر این است که به هر ناحیه حداقل یک فروشنده اختصاص دهد. و هر

فروشنده نیز فقط در یک ناحیه فعالیت کند. هدف تعیین تعداد فروشنده‌ای است که به هر ناحیه تخصیص می‌یابد تا فروش حداکثر گردد. میزان افزایش فروش در هر ناحیه بر حسب تعداد فروشنده‌ای که در آن ناحیه فعالیت می‌کند در جدول زیر نشان داده شده است.

ناحیه / مقدار فروشنده	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۵
۲	۶	۶	۷
۳	۹	۸	۱۰
۴	۱۱	۱۰	۱۲

پاسخ:

تعاریف اساسی در حل با استفاده از برنامه‌ریزی پویا:

۱- **مرحله:** هر ناحیه بیان‌گر یک مرحله است.

۲- **وضعیت (حالت):** فروشنده‌هایی که هنوز اختصاص پیدا نکرده‌اند.

۳- **متغیر تصمیم:** چه تعداد فروشنده در مرحله‌ی iام به ناحیه‌ی iام اختصاص یابد.

مرحله‌ی ۳: ناحیه‌ی ۳

$s_۳ \backslash x_۳$	تابع برگشتی ۱	۲	۳	۴	$f^*_{(x_۳)}$	$x^*_۳$
۱	۵	–	–	–	۵	۱
۲	۵	۷	–	–	۷	۲
۳	۵	۷	۱۰	–	۱۰	۳
۴	۵	۷	۱۰	۱۲	۱۲	۴

❖ توضیح جدول فوق:

با توجه به فرض سؤال نمی‌توان وضعیتی را داشت که در مرحله‌ی iام هیچ فروشنده‌ای باقی نمانده باشد زیرا در هر مرحله باید حداقل یک فروشنده اختصاص پیدا کرده باشد.

مرحله‌ی ۲: ناحیه‌ی ۲

$s_۲ \backslash x_۲$	تابع برگشتی ۱	۲	۳	۴	$f^*_{(x_۲)}$	$x^*_۲$
۲	۳+۵	–	–	–	۸	۱
۳	۳+۷	۶+۵	–	–	۱۱	۲
۴	۳+۱۰	۶+۷	۸+۵	–	۱۳	۳ یا ۲ یا ۱
۵	۳+۱۲	۶+۱۰	۸+۷	۱۰+۵	۱۶	۲

❖ توضیح جدول فوق:

نمی‌توان وضعیتی رو داشت که ۱ فروشنده باقی مانده باشد زیرا در این صورت حداقل یکی از دو ناحیه باقی مانده در این مرحله و مرحله‌ی بعدی خالی می‌ماند که با فرض سؤال در تناقض است.

مرحله‌ی ۱: ناحیه‌ی ۱

$s_۱ \backslash x_۱$	۱	۲	۳	۴	$f^*_{(x_۱)}$	$x^*_۱$
۶	۴+۱۶	۶+۱۳	۹+۱۱	۱۱+۸	۲۰	۱ یا ۳

❖ توضیح جدول پیشین:

نمی‌توان برای متغیر تصمیم حالت‌های ۵ و ۶ را در نظر گرفت زیرا در صورت اختصاص بیش از ۴ فروشنده به این مرحله حداقل یکی از مراحل بعدی بدون فروشنده باقی خواهند ماند.

مسأله دارای جواب بهینه‌ی چند گانه است.

جوال اول: ناحیه‌ی اول: ۱ فروشنده – ناحیه‌ی دوم: ۲ فروشنده – ناحیه‌ی سوم: ۳ فروشنده

جواب دوم: ناحیه‌ی اول: ۳ فروشنده – ناحیه‌ی دوم: ۲ فروشنده – ناحیه‌ی سوم: ۱ فروشنده

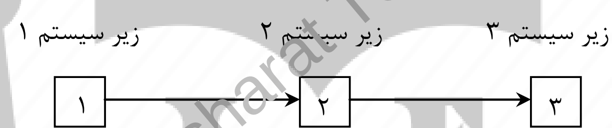
مثال ۳. یک سیستم الکترونیکی از سه زیر سیستم سری تشکیل شده است. قیمت هر زیر سیستم و احتمال خرابی آن طبق جدول زیر است:

زیر سیستم	قیمت هر واحد	احتمال خرابی
۱	۱۰۰	۰/۵
۲	۱۲۰	۰/۴
۳	۳۰۰	۰/۱

در صورتی که کل بودجه‌ی در دسترس ۸۳۰ واحد باشد و برای راه‌اندازی این سیستم از هر یک از زیر سیستم‌ها حداقل یک واحد باید موجود باشد با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تعیین کنید از هر یک از زیر سیستم‌ها چند عدد وجود داشته باشد تا پایایی[1] کل سیستم بیشینه شود؟

پاسخ:

به شکل زیر توجه کنید:



تعاریف اساسی در حل با استفاده از برنامه‌ریزی پویا:

مرحله: هر یک از زیر سیستم‌ها معرف یک مرحله می‌باشند.

وضعیت: میزان بودجه‌ی باقی‌مانده برای هر مرحله

متغیر تصمیم‌گیری: تعداد زیر سیستم‌هایی که در هر مرحله‌ی iام خریداری می‌شود.

هدف: بیشینه کردن قابلیت اطمینان کل سیستم.

1- Reliability

پیش از بیان مرحله‌ی ۳، تمامی حالت‌های ۱ و ۲ را در نظر می‌گیریم:

بودجه‌ی باقی‌مانده	زیر سیستم ۲	زیر سیستم ۱	تعداد حالات خرید
۶۱۰	۱	۱	۱
۴۹۰	۲	۱	۲
۳۷۰	۳	۱	۳
۵۱۰	۱	۲	۴
۴۱۰	۱	۳	۵
۳۱۰	۱	۴	۶
۳۹۰	۲	۲	۷

لازم به ذکر است حالت دیگری وجود ندارد زیرا دراین صورت نمی‌توان حداقل یکی از زیر سیستم ۳ خرید.

مرحله‌ی ۳: زیر سیستم ۳

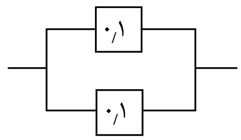
s_3 \ x_3	۱	۲	$f^*_{(x_3)}$	x_3^*
۶۱۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹	۲
۴۹۰	۰/۹	–	۰/۹	۱
۳۷۰	۰/۹	–	۰/۹	۱
۵۱۰	۰/۹	–	۰/۹	۱
۴۱۰	۰/۹	–	۰/۹	۱
۳۱۰	۰/۹	–	۰/۹	۱
۳۹۰	۰/۹	–	۰/۹	۱

❖ توضیح جدول فوق:

شکل زیر را برای تعداد زیر سیستم‌ها در حالتی که امکان خرید ۲ عدد از زیر سیستم ۳ می‌باشد را در نظر بگیرید:

اعداد داخل مربع احتمال خرابی را نشان می‌دهند.

زیر سیستم ۳



برای بیان این‌که جریان برقرار باشد باید حداقل یکی از زیر سیستم‌های ۳ سالم باشند.

پس:

۰/۹۹ = ۰/۰۱ − ۱ = (هر دو خراب باشند) − ۱ = احتمال برقراری جریان از زیر سیستم ۳

مرحله‌ی ۲: زیر سیستم ۲

پیش از بیان جدول مربوط به مرحله‌ی ۲، تمامی حالت‌های خرید زیر سیستم ۱ را در نظر بگیرید:

بودجه‌ی باقی‌مانده	زیر سیستم ۱	حالات خرید
۷۳۰	۱	۱
۶۳۰	۲	۲
۵۳۰	۳	۳
۴۳۰	۴	۴

لازم به ذکر است حالت دیگری برای خرید وجود ندارد زیرا در این صورت نمی‌توان با پول باقی‌مانده، حداقل یک زیر سیستم ۱ و ۳ خرید.

اکنون مرحله‌ی ۲ بیان می‌گردد.

$s_۲ \backslash x_۲$	۱	۲	۳	$f^*_{(x_۲)}$	$x^*_۲$
۷۳۰	۰/۶×۰/۹۹	۰/۸۴×۰/۹	۰/۹۳۶×۰/۹	۰/۸۴۲۴	۳
۶۳۰	۰/۶×۰/۹	۰/۸۴×۰/۹	–	۰/۷۵۶	۲
۵۳۰	۰/۶×۰/۹	–	–	۰/۵۹۴	۱
۴۳۰	۰/۶×۰/۹	–	–	۰/۵۹۴	۱

❖ توضیح جدول فوق:

اگر در ابتدای این مرحله به‌طور مثال ۷۳۰ واحد پول داشته باشیم و بخواهیم زیر سیستم ۲ را تهیه نماییم ۳ حالت امکان‌پذیر است. اگر بخواهیم ۳ زیر سیستم ۲ داشته باشیم یعنی ۱۶۰ واحد از پول باقی‌مانده کاسته خواهد شد. پایایی در این تصمیم‌گیری برابر است با:

$$۱-(۰/۴)^{۳} = ۰٫۹۳۶$$

از طرفی ۳۷۰ واحد پول باقیمانده به مرحله‌ی بعدی انتقال می‌یابد که تصمیم بهینه در آن‌جا این بود که یک زیر سیستم ۳ را بخریم. پس پایایی کل در این حالت برابر است با:

$$۰/۹۳۶ \times ۰/۹ = ۰/۸۴۲۴$$

مرحله‌ی ۱: زیر سیستم ۱

s_1 \ x_1	۱	۲	۳	۴	$f^*_{(x_1)}$	x_1^*
۸۳۰	۰/۵× ۰/۸۴۲۴	۰/۷۵× ۰/۷۵۶	۰/۸۷۵× ۰/۵۹۴	۰/۹۳۷۵× ۰/۵۹۴	۰/۵۶۷	۲

پس سیاست بهینه به صورت زیر است:

زیر سیستم	میزان خرید
زیر سیستم ۱	۲
زیر سیستم ۲	۲
زیر سیستم ۳	۱

جهت سادگی در ارائه‌ی مطالب، روابط تابع برگشتی ذکر نگردید، امّا در این‌جا رابطه‌ی تابع برگشتی برای مرحله‌ی ۱ و متغیر تصمیم ۲ ذکر می‌گردد.

$$f_1(s_1 = ۸۳۰, x_1 = ۲) = [۱ - (۰/۵)^۲] \times f_2^*(s_2 = ۶۳۰) = ۰/۷۵ \times ۰/۷۵۶$$

مثال۴. یک سیستم الکترونیکی را در نظر بگیرید که از چهار عنصر تشکیل شده است. عملکرد این سیستم منوط به عملکرد همه‌ی این عناصر است. با نصب چند واحد موازی برای هر عنصر می‌توان پایایی سیستم را بهبود بخشید؟

احتمال عملکرد هر عنصر با فرض داشتن دو یا سه واحد موازی در جدول صفحه بعد نشان داده شده است.

تعداد واحدهای موازی	عنصر ۱	عنصر ۲	عنصر ۳	عنصر ۴
۱	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۵
۲	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۷
۳	۰/۸	۰/۸	۰/۹	۰/۹

احتمال عملکرد سیستم برابر با حاصل‌ضرب عملکرد تک تک عناصر است. هزینه‌ی نصب یک، دو یا سه واحد موازی برای هر عنصر در جدول زیر نشان داده شده است.

تعداد واحدهای موازی	عنصر ۱	عنصر ۲	عنصر ۳	عنصر ۴
۱	۲	۳	۲	۳
۲	۳	۵	۴	۴
۳	۴	۶	۵	۵

حداکثر بودجه‌ای که می‌تواند به این امر اختصاص یابد ۱۴ واحد پولی است. با استفاده از برنامه ریزی پویا تعیین کنید که چند واحد موازی برای هر عنصر نصب شود تا احتمال عملکرد سیستم حداکثر شود؟

پاسخ:

تعاریف اساسی برای حل با استفاده از برنامه‌ریزی پویا:

۱- **مرحله:** هر عنصر بیان‌گر یک مرحله است. پس ۴ مرحله داریم.

۲- **وضعیت:** همانند مثال قبلی، بودجه‌ی باقی‌مانده در ابتدای مرحله به عنوان حالت انتخاب می‌شود.

۳- **متغیر تصمیم:** تعداد واحدهایی که برای مرحله‌ی iام خریداری می‌شوند.

پیش از بیان مرحله‌ی چهارم، حالت‌هایی که برای وضعیت ممکن است رخ دهد بیان می‌شوند:

اگر از عنصر ۱ و ۲ و ۳ یک واحد در مراحل قبلی خریداری شده باشند از بودجه‌ی ۷ واحد باقی می‌ماند زیرا هر واحد از عناصر ۱ و ۲ و۳ به ترتیب دارای هزینه‌ی ۲ و ۳ و ۲ می‌باشند پس:

$۱۴-(۲+۳+۲)=۷$

مرحله‌ی ۴: عنصر ۴

s_4 \ x_4	۱	۲	۳	$f^*_{(x_4)}$	x^*_4
۳	۰/۵	–	–	۰/۵	۱
۴	۰/۵	۰/۷	–	۰/۷	۲
۵	۰/۵	۰/۷	۰/۹	۰/۹	۳
۶	۰/۵	۰/۷	۰/۹	۰/۹	۳
۷	۰/۵	۰/۷	۰/۹	۰/۹	۳

❖ توضیح جدول فوق:

اگر به‌طور مثال ۵ واحد موجودی داشته باشیم و ۲ واحد موازی عنصر ۴ را بخریم قابلیت اطمینان سیستم ۰٫۷ خواهد شد.

پس از بیان مرحله‌ی سوم، حالت‌هایی که ممکن است برای موجودی باقیمانده در این مرحله (وضعیت) رخ دهد مورد بررسی قرار می‌گیرند: (حداقل پول باقی‌مانده برای این مرحله باید ۵ واحد باشد. چرا؟)

پول باقی‌مانده	حجم پول مصرفی	تعداد واحد موازی عنصر ۱ و ۲: عنصر ۲	تعداد واحد موازی عنصر ۱ و ۲: عنصر ۱	
۹	۵	۱	۱	
۷	۷	۲	۱	
۶	۸	۳	۱	
۸	۶	۱	۲	
۶	۸	۲	۲	
۵	۹	۳	۲	
۷	۷	۱	۳	
۵	۹	۲	۳	
۴	۱۰	۳	۳	این حالت قابل قبول نیست زیرا با این مقدار باقی‌مانده نمی‌توان حداقل یکی از عناصر ۳ و ۴ را داشت.

اکنون مرحله‌ی ۳ بیان می‌شود:

مرحله‌ی ۳: عنصر ۳

$s_۳$ \ $x_۳$	تابع برگشتی			$f^*_{(x_۳)}$	$x^*_۳$
	۱	۲	۳		
۵	۰/۷×۰/۵	–	–	۰/۳۵	۱
۶	۰/۷×۰/۷	–	–	۰/۴۹	۱
۷	۰/۷×۰/۹	۰/۸×۰/۵	–	۰/۶۳	۱
۸	۰/۷×۰/۹	۰/۸×۰/۷	۰/۹×۰/۵	۰/۶۳	۱
۹	۰/۷×۰/۹	۰/۸×۰/۹	۰/۹×۰/۷	۰/۷۲	۲

در مورد متغیر تصمیم باید توجه داشت حداقل ۳ واحد پول باید به مرحله‌ی بعدی انتقال یابد تا بتوان از عنصر ۴ هم داشته باشیم. در مورد سایر اعداد جدول فوق باید گفت: به‌طور مثال اگر تصمیم بگیریم ۳ واحد موازی از عنصر ۳ داشته باشیم، ۵ واحد از بودجه در این مرحله مصرف می‌شود و ۴ واحد به مرحله‌ی بعدی انتقال می‌یابد که در آن‌جا بهترین تصمیم دارای ارزش ۰/۷ می‌باشد. پس:

$۰/۹ \times ۰/۷ = ۰/۶۳$

مرحله‌ی ۲: عنصر ۲

پیش از بیان مرحله‌ی دوم حالت‌هایی که ممکن است برای موجودی باقی‌مانده در این مرحله رخ دهد مورد بررسی قرار می‌گیرند. (حداقل پول باقی‌مانده برای این مرحله باید ۸ واحد باشد.)

پول باقی‌مانده برای مرحله‌ی ۲	حجم پول مصرفی	تعداد واحد موازی عنصر ۱
۱۲	۲	۱
۱۱	۳	۲
۱۰	۴	۳

$s_۲ \backslash x_۲$	تابع برگشتی ۱	۲	۳	$f^*_{(x_۲)}$	$x^*_۲$
۱۰	۰/۶×۰/۶۳	۰/۷×۰/۳۵	–	۰/۳۷۸	۱
۱۱	۰/۶×۰/۶۳	۰/۷×۰/۴۹	۰/۸×۰/۳۵	۰/۳۷۸	۱
۱۲	۰/۶×۰/۷۲	۰/۷×۰/۶۳	۰/۸×۰/۴۹	۰/۴۴۱	۲

❖ توضیح جدول فوق:

اگر ۱۰ واحد پولی برای ما در ابتدای این مرحله باقی‌مانده باشد اگر ۳ واحد موازی از عنصر ۲ تهیه کنیم، تنها ۴ واحد به مراحل بعدی می‌رود که نمی‌توان از عناصر ۳ و ۴ تهیه کرد. پس این امر امکان‌پذیر نیست. اگر ۱۲ واحد داشته باشیم و ۲ واحد موازی از عنصر ۲ تهیه کنیم ۷ واحد به مرحله‌ی بعدی اختصاص می‌یابد که در آن‌جا ارزش سیاست بهینه ۰/۶۳ بوده است.

پس در کل پایایی سیستم با اتخاذ چنین تصمیمی برابر ۰/۷×۰/۶۳ می‌باشد.

مرحله‌ی ۱:

$s_۱ \backslash x_۱$	تابع برگشتی ۱	۲	۳	$f^*_{(x_۱)}$	$x^*_۱$
۱۴	۰/۵× ۰/۴۴۱	۰/۶× ۰/۳۷۸	۰/۸× ۰/۳۷۸	۰/۳۰۲۴	۳

در تعیین متغیر تصمیم باید دقت کنیم به هر میزانی نمی‌توانیم از عنصر ۱ داشته باشیم زیرا باید از عناصر ۲ و ۳ و ۴ هم تهیه کنیم. پس حداکثر پول مصرفی در این مرحله می‌تواند ۶ واحد باشد. البته ندانستن این نکته در این مرحله برای این سؤال مشکلی به‌وجود نمی‌آورد!)

پس تصمیم بهینه به صورت زیر است:

سه واحد موازی : از عنصر ۱
یک واحد موازی : از عنصر ۲
یک واحد موازی : از عنصر ۳
سه واحد موازی : از عنصر ۴

مثال ۵. صاحب یک فروشگاه زنجیره ای ۵ جعبه توت فرنگی برای فروش در ۳ شعبه خود خریداری کرده است. مقدار فروش توت فرنگی در این ۳ شعبه متفاوت است. بنابراین صاحب فروشگاه مایل است این ۵ جعبه را طوری به ۳ شعبه تخصیص دهد که امید ریاضی کل سود حاصل حداکثر شود. صاحب فروشگاه نمی‌خواهد محتوای یک جعبه را بین شعبه ها تقسیم کند. بنابراین مانعی نمی‌بینند اگر یکی از شعبه ها توت فرنگی نداشته باشند. جدول زیر امید ریاضی سود هر شعبه را با درنظرگرفتن تعداد جعبه که به این شعبه اختصاص می‌یابد را نشان می‌دهد. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا چگونگی تخصیص این ۵ جعبه به ۳ شعبه را طوری تعیین کنید که امید ریاضی سود کل حداکثر شود.

تعداد جعبه ها	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۰	۴	۹	۱۳	۱۸	۲۰
۲	۰	۶	۱۱	۱۵	۱۹	۲۲
۳	۰	۵	۹	۱۴	۱۷	۲۱

پاسخ: این مساله همانند مساله سرمایه‌گذاری می‌باشد و به روش پسرو حل می‌گردد. پیش از حل، عناصر برنامه‌ریزی پویا این مساله بیان می‌گردند:

مرحله: شعبه‌ها. بنابراین ۳ مرحله داریم.

متغیر وضعیت(حالت): تعداد جعبه های باقی‌مانده (اختصاص نیافته) در مرحله nام: s_n

متغیر تصمیم: تعداد جعبه‌هایی که به مرحله nام اختصاص داده می‌شود: x_n

تابع بازگشتی مساله در مرحله nام:

$$f_n(s_n,x_n)=c_{n,s_n,x_n}+f^*_{n+1}(s_{n+1})$$

همانطور که از مساله سرمایه گذاری به خاطر دارید، s_{n+1} برابر است با $s_{n+1}=s_n-x_n$

بنابراین داریم:

مرحله سوم: مربوط به شعبه سوم که نام آن را x_3 قرار می‌دهیم.

s_3 \ x_3	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰	–	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰	۵	–	–	–	–	۵	۱
۲	۰	۵	۹	–	–	–	۹	۲
۳	۰	۵	۹	۱۴	–	–	۱۴	۳
۴	۰	۵	۹	۱۴	۱۷	–	۱۷	۴
۵	۰	۵	۹	۱۴	۱۷	۲۱	۲۱	۵

مرحله دوم: مربوط به شعبه دوم که نام آن را $x_۲$ قرار می‌دهیم.

$s_۲$ \ $x_۲$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰+۰	–	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰+۵	۶+۰	–	–	–	–	۶	۱
۲	۰+۹	۶+۵	۱۱+۰	–	–	–	۱۱	۱ یا ۲
۳	۰+۱۴	۶+۹	۱۱+۵	۱۵+۰	–	–	۱۶	۲
۴	۰+۱۷	۶+۱۴	۱۱+۹	۱۵+۵	۱۹+۰	–	۲۰	۱ یا ۲ یا ۳
۵	۰+۲۱	۶+۱۷	۱۱+۱۴	۱۵+۹	۱۹+۵	۲۲+۰	۲۵	۲

توضیح: بطور مثال برای وضعیت سوم و تصمیم ۲ داریم:

$$f_۲(۳,۲) = c_{۲,۳,۲} + f_۳^*(۱) = ۱۱ + ۵ = ۱۶$$

مرحله ۱: مربوط به شعبه یک که نام آن را $x_۱$ قرار می‌دهیم.

$s_۱$ \ $x_۱$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۵	۰+۲۵	۴+۲۰	۹+۱۶	۱۱+[illegible]	۱۸+۶	۲۰+۰	۲۵	۰ یا ۲

بنابراین سیاست بهینه برابر است با:

شعبه سوم: سه جعبه، شعبه دوم: دو جعبه و شعبه اول: صفر جعبه

یا

شعبه سوم: یک جعبه، شعبه دوم: دو جعبه و شعبه اول: دو جعبه

و ارزش بهینه برابر است با $z^* = ۲۵$

مثال ۶. یک شرکت ساختمانی قصد دارد که سه ساختمان جدید C, B, A را با مدت زمان یک ساختمان در سال بسازد. این شرکت می‌خواهد برنامه ساخت سازمان ها را تعیین کند. هزینه‌های ساخت هر ساختمان بستگی به ساختمانهایی دارد که پیش از آن ساخته شده است. با توجه به جدول زیر با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، سیاست بهینه ساخت این ساختمان ها را مشخص کنید.

ساختمان ساخته شده	هزینه ساختمان		
	A	B	C
هیچکدام	۱۰	۸	۶
A	-	۹	۸
B	۱۳	-	۹
C	۱۱	۱۰	-
A,B	-	-	۱۱
A,C	-	۱۲	-
B,C	۱۴	-	-

پاسخ: شیوه حل به روش پسرو می باشد. عناصر برنامه ریزی پویا:

مرحله: ۳ مرحله داریم. هر یک از ساختمانهای A,B,C بیانگر یک مرحله می‌باشند.

متغیر وضعیت: ساختمانهای ساخته شده تا مرحله nام.

متغیر تصمیم: ساختمانی که در مرحله nام ساخته می‌شود.

مرحله سوم:

$s_3 \backslash x_3$	A	B	C	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
A,B	-	-	۱۱	۱۱	C
A,C	-	۱۲	-	۱۲	B
B,C	۱۴	-	-	۱۴	A

مرحله دوم:

$s_2 \backslash x_2$	A	B	C	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
A	-	۹+۱۱	۸+۱۲	۲۰	B یا C
B	۱۳+۱۱	-	۹+۱۴	۲۳	C
C	۱۱+۱۲	۱۰+۱۴	-	۲۳	A

مرحله اول:

$s_1 \backslash x_1$	A	B	C	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۱۰+۲۰	۸+۲۳	۶+۲۳	۲۹	C

توجه کنید که در ابتدا هیچ ساختمانی ساخته نشده است به همین دلیل $S_۱$ برابر صفر است.

ترتیب ساخت به صورت زیر است:

ابتدا باید ساختمان C ساخته شود. اگر به مرحله دوم و وضعیتی که ساختمان C ساخته شده است نگاه بیندازید ساختمان بعدی که باید ساخته شود ساختمان A و نهایتاً ساختمان B باید ساخته شود.

✍ **تمرین**. یک کارخانه می تواند کالاهای نوع A, B, C را تولید کند و بفروشد. درآمد حاصل بصورت زیر است:

تعداد کالا	درآمد		
	نوع A	نوع B	نوع C
۱	۵	۶	۱۰
۲	۹	۱۲	۱۸
۳	۱۲	۱۷	۲۵

تعداد مواد خام x, y مورد نیاز جهت تولید تعداد مختلف از کالاهای A, B, C بصورت جدول زیر است.

تعداد	نوع A		نوع B		نوع C	
	x	y	x	y	x	y
۱	۲	۱	۱	۱	۱	۲
۲	۳	۱	۲	۲	۲	۳
۳	۳	۲	۳	۲	۲	۴

با توجه به اینکه ۴ واحد از ماده خام x و ۶ واحد از ماده خام y در دسترس است. از هر نوع کالا چه تعداد باید تولید شود تا کل درآمد حاصله ماکزیمم شود.

راهنمایی: مرحله را هر کدام از انواع کالاهای A, B, C و متغیر وضعیت را میزان مواد خام باقیمانده به مرحله بعدی (x, y) و متغیر تصمیم را تعداد کالاهایی که تصمیم به تولید آن داریم تعریف کنید.

جواب: سیاست بهینه و ارزش بهینه برابر است با: $x_c^* = ۱ \ , \ x_B^* = ۳ \ , \ x_A^* = ۰, \ z^* = ۲۷$

مثال ۷. یک شرکت هواپیمائی می‌بایست ۵۹۳ مسافر را حمل کند. این شرکت می‌تواند هواپیماهای نوع ۱و۲و۳ را بکار گیرد که ظرفیت آنها به ترتیب ۸۰ و ۱۷۰ و ۲۰۰ نفر است. در صورت عدم استفاده از یک نوع هواپیما، هزینه مربوط به آن صفر خواهد بود. در غیر این صورت معادلات هزینه به صورت زیر خواهد بود:

$$c_۱(x_۱) = ۵ + ۳x_۱ \quad , \ c_۲(x_۲) = ۸ + ۳x_۲ \quad , \ c_۳(x_۳) = ۱۰ + ۳x_۳$$

از هر هواپیما چند فروند باید مورد استفاده قرار گیرد تا مجموع هزینه ها حداقل شود؟

پاسخ: شیوه حل به روش پسرو می باشد. عناصر برنامه ریزی پویا:

مرحله: هر کدام از هواپیماها به عنوان یک مرحله شناخته می‌شوند. بنابراین سه مرحله داریم.

متغیر وضعیت: تعداد مسافرین باقیمانده در مرحله nام

متغیر تصمیم: تعداد هواپیماهای نوع n که در مرحله nام باید انتخاب شوند.

مرحله سوم: هواپیمای نوع سوم

s_3 \ x_3	۰	۱	۲	۳	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰	-	-	-	۰	۰
۱−۲۰۰	-	۱۰+۳(۱)	-	-	۱۳	۱
۲۰۱−۴۰۰	-	-	۱۰+۳(۲)	-	۱۶	۲
۴۰۱−۵۹۳	-	-	-	۱۰+۳(۳)	۱۹	۳

توضیح جدول پیشین:

اگر به طور مثال در وضعیتی باشیم که بین ۲۰۱ تا ۴۰۰ مسافر باقی مانده باشند باید از ۲ هواپیمای نوع سه استفاده کنیم. بنابراین با توجه به $c_3(x_3)=۱۰+۳x_3$ داریم: $۱۰+۳(۲)=۱۶$. به عنوان مثالی دیگر، برای حالتی که بین ۲۰۱ تا ۴۰۰ مسافر داشته باشیم نمی‌توانیم تنها با یک هواپیمای نوع سه این مسافرین را جابجا کنیم زیرا ظرفیت هواپیمای نوع ۳، تنها ۲۰۰ نفر است بنابراین این حالت امکان پذیر نمی‌باشد و با خط تیره نشان داده شده است.

مرحله دوم: هواپیمای نوع دوم

s_2 \ x_2	۰	۱	۲	۳	۴	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰+۰	-	-	-	-	۰	۰
۳۳	۰+۱۳	۱۱+۰	-	-	-	۱۱	۱
۱۱۳	۰+۱۳	۱۱+۰	-	-	-	۱۱	۱
۱۹۳	۰+۱۳	۱۱+۱۳	۱۳+۰	-	-	۱۳	۰
۲۷۳	۰+۱۶	۱۱+۱۳	۱۴+۰	-	-	۱۴	۲
۳۵۳	۰+۱۶	۱۱+۱۳	۱۴+۱۳	۱۷+۰	-	۱۶	۰
۴۳۳	۰+۱۹	۱۱+۱۶	۱۴+۱۳	۱۷+۰	-	۱۷	۳
۵۱۳	۰+۱۹	۱۱+۱۶	۱۴+۱۳	۱۷+۱۳	-	۱۹	۰
۵۹۳	۰+۱۹	۱۱+۱۶	۱۴+۱۶	۱۷+۱۳	۲۰+۰	۱۹	۰

توضیح چند نکته الزامی است: در مورد متغیر وضعیت باید گفت: چندین حالت برای متغیر وضعیت بیشتر پیش نمی‌آید. زیرا زمانی با حالت ۳۵۳ مواجه خواهیم شد که در مرحله اول مربوط به هواپیمای نوع یک، ۳ تا از هواپیمای نوع ۱ مورد استفاده قرار گیرد و از آنجاییکه هر کدام از هواپیماهای نوع ۱ توان حمل ۸۰ مسافر را دارند بنابراین تعداد مسافر باقیمانده برابر است با $۵۹۳-۳(۸۰)=۳۵۳$ سایر حالات هم به همین صورت و با احتساب حالات محتمل مورد استفاده هواپیمای نوع یک، بدست می آیند. در مورد خانه-

ای که پررنگ شده است: این خانه مربوط به حالتی است که ۳۵۳ مسافر باقی مانده است و در این مرحله ۱ هواپیمای نوع ۲ باید مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به $c_2(x_2)=8+3x_2$ داریم: $8+3=11$. از طرفی هواپیمای نوع ۲ تنها ۱۷۰ مسافر را حمل می‌کند. بنابراین ۱۸۳مسافر باقی مانده است. با نگاه به حالت ۱۸۳ مسافر باقی مانده در مرحله سوم داریم: ارزش بهترین تصمیم برابر ۱۳ است. بنابراین در کل برای این خانه جدول داریم: $11+13=24$

مرحله اول: هواپیمای نوع یک

x_1 / s_1	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
۵۹۳	۰+ ۱۹	۸+ ۱۹	۱۱+ ۱۷	۱۴+ ۱۶	۱۷+ ۱۴	۲۰+ ۱۳	۲۳+ ۱۱	۲۶+ ۱۱	۲۹+۰	۱۹	۰

بنابراین ارزش بهینه این مساله برابر ۱۹ و سیاست بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$x_1=0$ ، $x_2=0$ و $x_3=3$

مثال۸. کارخانه بزرگی برای خطوط مختلف هوائی، هواپیما می‌سازد. آخرین مرحله فرآیند تولید، شامل ساخت موتور و نصب آن روی بدنه هواپیما است. این کارخانه متعهد شده است که تعداد قابل ملاحظه‌ای هواپیما را در آینده نزدیک تحویل دهد. از این رو باید برنامه تولید موتور جت این هواپیما را برای چهار ماه آینده زمانبندی کند. برای اینکه این هواپیماها به موقع تحویل داده شوند، باید موتور آنها به تعدادی که در جدول زیر آمده است موجود باشد بنابراین حاصل جمع تولید در آخر ماههای ۱و۲و۳و۴ به ترتیب مساوی ۱۰و ۲۵و۵۰ و ۷۵ واحد خواهد بود. ظرفیت آزاد و هزینه‌های تولید در هر ماه در جدول زیر آمده است. با توجه به اینکه می‌توان در هر ماه مازاد بر نیاز آن ماه تولید کرد و در ماههای آینده استفاده کرد. هزینه ماهیانه انبارداری موتور معادل ۱۵ هزار دلار است(که بهره سرمایه راکد را نیز شامل می شود). مدیر تولید می‌خواهد برنامه زمانبندی تولید چهار ماه آینده موتور را طوری تعیین کند که علاوه بر تقبل تعهدات شرکت، کل هزینه‌های تولید و انبار داری را حداقل نماید.

		هزینه بر حسب میلیون دلار		
ماه	برنامه نصب (تقاضا)	حداکثر تولید	هزینه تولید هر واحد	هزینه انبارداری هر واحد
۱	۱۰	۲۵	۱٫۰۸	۰٫۰۱۵
۲	۱۵	۳۵	۱٫۱۱	۰٫۰۱۵
۳	۲۵	۳۰	۱٫۱	۰٫۰۱۵
۴	۲۰	۱۰	۱٫۱۳	-

پاسخ: شیوه حل به روش پسرو می‌باشد. عناصر برنامه ریزی پویا:

مرحله: هر کدام از ماهها یک مرحله به حساب می‌آیند. ۴ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: موتورهای موجود در انبار در ابتدای مرحله i ام

متغیر تصمیم گیری: تعداد موتورهای تولید شده در مرحله i ام

مرحله چهارم: تصمیم‌گیری در مورد تولید موتور در ماه چهارم.

s_4 \ x_4	۰	۵	۱۰	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۱۰	-	-	۱۱/۴۵	۱۱/۴۵	۱۰
۱۵	-	۵/۸۷۵	-	۵/۸۷۵	۵
۲۰	۰/۳	-	-	۰/۳	۰

توضیح جدول فوق:

ابتدا در مورد حالتهای این مرحله باید گفت که چون ۲۰ تقاضا در این ماه وجود دارد و از طرفی حداکثر تولید ۱۰ می‌باشد، باید حداقل ۱۰ واحد از ماههای قبلی اضافه در انبار باقی مانده باشد. همچنین چون میزان تولیدات ماههای قبل همگی مضرب ۵ هستند تنها حالاتی که می‌تواند در ماه ۴ وجود داشته باشد ۱۰، ۱۵ و ۲۰ می باشد. دقت کنید حالت صفر امکان‌ناپذیر است زیرا باید تقاضای ۱۰ واحدی باید پاسخ داده شود.

یکی از عناصر جدول توضیح داده می‌شوند. حالتی که پررنگ شده است توضیح داده می‌شود.

چون ۱۰ واحد در انبار داریم، بنابراین ۱۰ واحد هزینه انبارداری خواهیم داشت یعنی: $10 \times 0/015$ و از طرفی چون باید ۲۰ واحد تقاضا برآورده شود، باید ۱۰ واحد تولید کنیم یعنی هزینه ساخت برابر است با $10 \times 1/13$ بنابراین مجموع هزینه ساخت و انبارداری برابر است با:

$(10 \times 1/13) + (10 \times 0/015) = 11/45$ و یا برای خانه مربوط به حالت $s = 15$ و $x = 5$ داریم:

چون ۱۵ واحد در انبار داریم، بنابراین ۱۵ واحد هزینه انبارداری خواهیم داشت یعنی: $15 \times 0/015$ و از طرفی چون باید ۲۰ واحد تقاضا برآورده شود، باید ۵ واحد تولید کنیم یعنی هزینه ساخت برابر است با $5 \times 1/13$ بنابراین مجموع هزینه ساخت و انبارداری برابر است با:

$(5 \times 1/13) + (15 \times 0/015) = 5/875$

مرحله سوم: تصمیم‌گیری در مورد تولید موتور در ماه سوم.

s_3 \ x_3	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۵	-	-	-	-	-	-	۴۴٫۵۲۵	۴۴٫۵۲۵	۳۰
۱۰	-	-	-	-	-	۳۹٫۱	۳۹٫۰۲۵	۳۹٫۰۲۵	۳۰
۱۵	-	-	-	-	۳۳٫۶۷۵	۳۳٫۶	۳۳٫۵۲۵	۳۳٫۵۲۵	۳۰
۲۰	-	-	-	۲۸٫۲۵	۲۸٫۱۷۵	۲۸٫۱	-	۲۸٫۱	۲۵
۲۵	-	-	۲۲٫۸۲۵	۲۲٫۷۵	۲۲٫۶۷۵	-	-	۲۲٫۶۷۵	۲۰
۳۰	-	۱۷٫۴	۱۷٫۳۲۵	۱۷٫۲۵	-	-	-	۱۷٫۲۵	۱۵
۳۵	۱۱٫۹۷۵	۱۱٫۹	۱۱٫۸۲۵	-	-	-	-	۱۱٫۸۲۵	۱۰

توضیح جدول پیشین: هزینه بهینه در مرحله چهارم + هزینه انبارداری + هزینه تولید $= f_3(s_3, x_3)$

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_3(۱۵,۳۰)=(۳۰\times ۱٫۱)+(۱۵\times ۰٫۰۱۵)+۰٫۳=۳۳٫۵۲۵$$

مرحله دوم: تصمیم‌گیری در مورد تولید موتور در ماه دوم

s_2 \ x_2	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	-	-	-	۶۶٫۷۲۵	۶۶٫۷۷۵	۶۶٫۸۲۵	۶۶٫۹۵	۶۶٫۷۲۵	۲۰
۵	-	-	۶۱٫۲۵	۶۱٫۳	۶۱٫۳۵	۶۱٫۴۷۵	۶۱٫۶	۶۱٫۲۵	۱۵
۱۰	-	۵۵٫۷۷۵	۵۵٫۸۲۵	۵۵٫۸۷۵	۵۶	۵۶٫۱۲۵	۵۶٫۲۵	۵۵٫۷۷۵	۱۰
۱۵	۵۰٫۳	۵۰٫۳۵	۵۰٫۴	۵۰٫۵۲۵	۵۰٫۶۵	۵۰٫۷۷۵	۵۰٫۹	۵۰٫۳	۵

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_2(10,25)=(25\times 1/11)+(10\times 0/015)+28/1=56$$

مرحله اول: تصمیم‌گیری در مورد تولید موتور در ماه اول.

s_1 \ x_1	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	-	-	۷۷٫۵۲۵	۷۷٫۴۵	۷۷٫۳۷۵	۷۷٫۳	۷۷٫۳	۲۵

بنابراین ارزش سیاست بهینه برابر است با ۷۷٫۳ و سیاست بهینه به صورت زیر خواهد بود:

ماه اول: ۲۵، ماه دوم ۵، ماه سوم ۳۰ و ماه چهارم ۱۰ واحد موتور باید تولید گردد.

مثال۹. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید (دقت کنید که متغیرها تنها مقادیر صحیح را اختیار می‌کنند).

$$\max z=x_1^2+2x_2^2+4x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1+2x_2+x_3\leq 8$$
$$x_j\geq 0\ ,\ j=1,2,3$$ و عدد صحیح

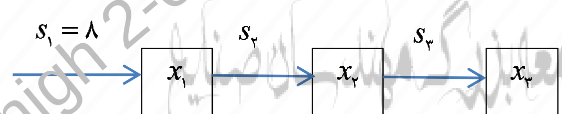
پاسخ: این مساله همانند مثال بخش ۵-۶-۱ صفحه ۵۳۲ می‌باشد. همانند مثالهای پیشین ابتدا عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این مثال بیان می‌گردند.

شیوه حل به روش پسرو می‌باشد (همانند مساله سرمایه‌گذاری به آن بنگرید).

مرحله: به تعداد متغیرهای تصمیم مرحله داریم. بنابراین ۳ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده برای استفاده در مرحله iام

متغیر تصمیم‌گیری: مقداری که متغیر iام در مرحله iام می‌گیرد.



$$\begin{cases} s_3=s_2-2x_2 \\ s_2=s_1-x_1 \end{cases}$$

مرحله ۳: مربوط به متغیر $x_{۳}$:

$x_{۳}$ / $s_{۳}$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰	–	–	–	–	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰	۴	–	–	–	–	–	–	–	۴	۱
۲	۰	۴	۸	–	–	–	–	–	–	۸	۲
۳	۰	۴	۸	۱۲	–	–	–	–	–	۱۲	۳
۴	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	–	–	–	–	۱۶	۴
۵	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	–	–	–	۲۰	۵
۶	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	–	–	۲۴	۶
۷	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	–	۲۸	۷
۸	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۲	۸

مرحله ۲: مربوط به متغیر $x_{۲}$:

$x_{۲}$ / $s_{۲}$	۰	۱	۲	۳	۴	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰+۴	–	–	–	–	۴	۰
۲	۰+۸	۲+۰	–	–	–	۸	۰
۳	۰+۱۲	۲+۴	–	–	–	۱۲	۰
۴	۰+۱۶	۲+۸	۸+۰	–	–	۱۶	۰
۵	۰+۲۰	۲+۱۲	۸+۴	–	–	۲۰	۰
۶	۰+۲۴	۲+۱۶	۸+۸	۱۸+۰	–	۲۴	۰
۷	۰+۲۸	۲+۲۰	۸+۱۲	۱۸+۴	–	۲۸	۰
۸	۰+۳۲	۲+۲۴	۸+۱۶	۱۸+۸	۳۲	۳۲	۰ یا ۴

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_{۲}(۸,۲)=۸+f_{۳}^{*}(s_{۳}=۴)=۸+۱۶=۲۴$$

مرحله ۱: مربوط به متغیر x_1

s_1 \ x_1	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۸	۰+ ۳۲	۱+ ۲۸	۴+ ۲۴	۹+ ۲۰	۱۶+ ۱۶	۲۵+ ۱۲	۳۶+ ۸	۴۹+ ۴	۶۴ +۰	۶۴	۸

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_1(۸,۳) = ۳^۲ + f_2^*(s_2 = ۵) = ۹ + ۲۰ = ۲۹$$

بنابراین سیاست بهینه و ارزش بهینه به صورت زیر می‌باشد:

$x_1^* = ۸$ ، موجودی باقیمانده برای مرحله دوم برابر $s_2 = s_1 - x_1 = ۸ - ۸ = ۰$ می‌باشد. بنابراین برطبق جدول مرحله دوم $x_2^* = ۰$ و به همین صورت بر طبق $s_3 = s_2 - ۲x_2 = ۰ - ۰ = ۰$ و جدول مرحله سوم $x_3^* = ۰$ و ارزش بهینه برابر $z^* = ۶۴$ می‌باشد.

مثال ۱۰. مساله برنامه‌ریزی غیرخطی و عدد صحیح زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = x_1 x_2^۲ x_3^۳$$
$$s.t.$$
$$x_1 + ۲x_2 + ۳x_3 \leq ۱۰$$
$$x_1 \geq ۱ \ , \ x_2 \geq ۱ \ , \ x_3 \geq ۱$$
x_1, x_2, x_3 عدد صحیح

پاسخ: روش حل به صورت بازگشت به عقب(پسرو) می‌باشد. عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این سوال

مرحله: به تعداد متغیرهای تصمیم مرحله داریم. بنابراین ۳ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده برای استفاده در مرحله iام

متغیر تصمیم‌گیری: مقداری که متغیر iام در مرحله iام می‌گیرد.

دقت کنید که متغیرهای این مساله حددار می‌باشند. چون مساله را با روش پسرو حل می‌کنیم باید دقت کنیم در پایان مراحل (مرحله سوم) موجودی باقیمانده نمی‌تواند عددی مانند ۱۰ باشد. زیرا متغیرهای x_1, x_2 حداقل مقدار یک را باید بگیرند. بدین جهت، با قرار دادن مقادیر مختلف برای متغیرهای x_1 و x_2 و درنظر گرفتن ضریب مصرف این محصولات در محدودیت اول (برای دو متغیر x_1 و x_2 به ترتیب ۱ و ۲ می‌باشد) میزان باقیمانده در مرحله سوم مشخص می‌گردد.

مرحله سوم: مربوط به متغیر $x_۳$ می‌باشد.

سیاست بهینه	ارزش سیاست بهینه	۲	۱	$x_۳$ / $s_۳$
۱	۱	–	۱	۳
۱	۱	–	۱	۴
۱	۱	–	۱	۵
۲	۸	۸	۱	۶
۲	۸	۸	۱	۷

مرحله دوم: مربوط به متغیر $x_۲$ می‌باشد.

سیاست بهینه	ارزش سیاست بهینه	۳	۲	۱	$x_۲$ / $s_۲$
۱	۱	–	–	۱×۱	۵
۱	۱	–	–	۱×۱	۶
۲	۴	–	۴×۱	۱×۱	۷
۱	۸	–	۴×۱	۱×۸	۸
۳	۹	۹×۱	۴×۱	۱×۸	۹

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_۱(۹,۲)=۲^۲\times f_۳^*(s_۳=۶)=۴\times۱=۴$$

مرحله یک: مربوط به متغیر $x_۱$ می‌باشد.

سیاست بهینه	ارزش سیاست بهینه	۵	۴	۳	۲	۱	$x_۱$ / $s_۱$
۲	۱۶	۵×۱	۴×۱	۳×۴	۲×۸	۱×۹	۱۰

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_۱(۱۰,۲)=۲\times f_۲^*(s_۲=۸)=۲\times۸=۱۶$$

بنابراین سیاست و ارزش بهینه به صورت زیر است:

$x_۳^*=۲$ ، $x_۲^*=۱$ ، $x_۱^*=۲$ و ارزش بهینه برابر $z^*=۱۶$ است.

مثال ۱۱. مساله برنامه‌ریزی غیر خطی عدد صحیح زیر با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = (x_۱ + ۲)^۲ + x_۲ x_۳ + (x_۴ - ۵)^۲$$

$$s.t.$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \le ۵$$

$x_j \ge ۰ \, , \, j = ۱,۲,۳$ و عدد صحیح

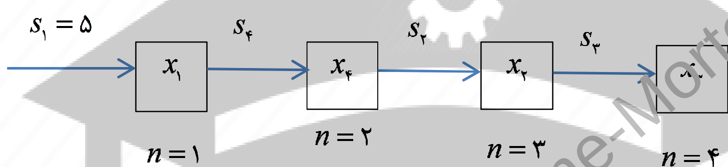
پاسخ: این مساله همانند مثال بخش ۵-۶-۱ صفحه ۵۳۲ می‌باشد. باید توجه داشت که در مراحل پایانی مربوط به متغیرهای $x_۲ , x_۳$ می‌باشند. چرا؟ برای پاسخ به این سوال، یکبار دیگر مثال صفحه ۵۳۲ را بطور کامل مطالعه کنید. همانند مثالهای پیشین ابتدا عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این مثال بیان می‌گردند.

شیوه حل به روش پسرو می باشد (همانند مساله سرمایه‌گذاری به آن بنگرید).

مرحله: به تعداد متغیرهای تصمیم مرحله داریم. بنابراین ۴ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده برای استفاده در مرحله i ام

متغیر تصمیم‌گیری: مقداری که متغیر i ام در مرحله i ام می‌گیرد.



مرحله ۴: مربوط به متغیر $x_۳$:

$s_۳$ \ $x_۳$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰	–	–	–	–	–	۰	۰
۱	۰	۱	–	–	–	–	۱	۱
۲	۰	۱	۲	–	–	–	۲	۲
۳	۰	۱	۲	۳	–	–	۳	۳
۴	[illegible]	۱	۲	۳	۴	–	۴	۴
[illegible]	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۵	۵

مرحله ۳: مربوط به متغیر $x_۳$:

$x_۳$ \ $s_۳$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰×۰	-	-	-	-	-	۰	۰
۱	۰×۱	۱×۰	-	-	-	-	۰	۰ یا ۱
۲	۰×۲	۱×۱	۲×۰	-	-	-	۱	۱
۳	۰×۳	۱×۲	۲×۱	۳×۰	-	-	۲	۱ یا ۲
۴	۰×۴	۱×۳	۲×۲	۳×۱	۴×۰	-	۴	۲
۵	۰×۵	۱×۴	۲×۳	۳×۲	۴×۱	۵×۰	۶	۲ یا ۳

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_۳(۵,۲)=۲\times f_۴^*(s_۴=۳)=۲\times ۳=۶$$

مرحله ۲: مربوط به متغیر $x_۴$:

$x_۴$ \ $s_۴$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۰	۰+۰	-	-	-	-	-	۰	۰
۱	۰+۰	۱۶+۰	-	-	-	-	۱۶	۱
۲	۰+۱	۱۶+۰	۹+۰	-	-	-	۱۶	۱
۳	۰+۲	۱۶+۱	۹+۰	۴+۰	-	-	۱۷	۱
۴	۰+۴	۱۶+۲	۹+۱	۴+۰	۱+۰	-	۱۸	۱
۵	۰+۶	۱۶+۴	۹+۲	۴+۱	۱+۰	۰+۰	۲۰	۱

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_۲(۵,۲)=۹+f_۳^*(s_۳=۳)=۹+۲=۱۱$$

مرحله ۱: مربوط به متغیر $x_۱$:

$x_۱$ \ $s_۱$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	ارزش سیاست بهینه	سیاست بهینه
۵	۴+۲۰	۹+۱۸	۱۶+۱۷	۲۵+۱۶	۳۶+۱۶	۴۹+۰	۵۲	۴

بطور مثال برای خانه جدول که پررنگ شده است:

$$f_۱(۵,۲)=(۲+۲)^۲+f_۲^*(s_۳=۳)=۱۶+۱۷=۳۳$$

سیاست و ارزش بهینه برابر است با:

$x_۴^*=۱$, $x_۳^*=۰$, $x_۲^*=۰$, $x_۱^*=۴$ و ارزش بهینه برابر $z^*=۵۲$ است.

مثال ۱۲. مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = 3x_1 + 7x_2 + x_3^2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$ و عدد صحیح

پاسخ: به مثال مساله کوله پشتی صفحه ۵۱۸ دقت کنید. عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این سوال:

روش حل به صورت بازگشت به عقب(پسرو) می‌باشد.

مرحله: به تعداد متغیرهای تصمیم مرحله داریم. بنابراین ۳ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: میزان باقیمانده از منابع برای استفاده در مرحله iام

دقت کنید که در اینجا دو محدودیت داریم. همانند مثالهای صفحات ۵۲۳ و ۵۳۳، a_i, b_i را به ترتیب میزان باقیمانده از منابع اول و دوم برای استفاده در مرحله iام درنظر می‌گیریم.

متغیر تصمیم: مقداری که متغیر iام در مرحله iام می‌گیرد.

مرحله سوم: مربوط به متغیر x_1 می‌باشد.

به جهت سادگی در محاسبات و کاهش تعداد متغیرهای حالت، متغیرهای حالت بدین صورت تعریف شده‌اند. منظور از s_1 در اینجا کمترین a_1, b_1 می‌باشد. یعنی: $s_1 = \min(a_1, b_1)$. نحوه صحیح‌تر آن بدین صورت بود که تمامی حالات ممکن منابع باقیمانده نوشته شوند.

s_1 \ x_1	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	f_1^*	x_1^*
۰	۰	-	-	-	-	-	-	۰	۰
۱	۰	۳	-	-	-	-	-	۳	۱
۲	۰	۳	۶	-	-	-	-	۶	۲
۳	۰	۳	۶	۹	-	-	-	۹	۳
۴	۰	۳	۶	۹	۱۲	-	-	۱۲	۴
۵	۰	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	-	۱۵	۵
۶	۰	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۱۸	۶

مرحله دوم: مربوط به متغیر $x_{۲}$ می‌باشد.

$s_{۲}=(G_{۲},H_{۲})$ \ $x_{۲}$	۰	۱	۲	۳	۴	$f_{۲}^{*}$	$x_{۲}^{*}$
(۱۲,۶)	۰+۱۸	۷+۱۵	۱۴+۱۲	۲۱+۹	۲۸+۰	۳۰	۳
(۱۰,۵)	۰+۱۵	۷+۱۲	۱۴+۹	۲۱+۳	–	۲۴	۳
(۸,۴)	۰+۱۲	۷+۹	۱۴+۶	–	–	۲۰	۲
(۶,۳)	۰+۹	۷+۶	۱۴+۰	–	–	۱۴	۲
(۴,۲)	۰+۶	۷+۳	–	–	–	۱۰	۱
(۲,۱)	۰+۳	–	–	–	–	۳	۰
(۰,۰)	۰+۰	–	–	–	–	۰	۰

توضیح چند نکته در مورد جدول پیشین الزامی است: در مورد منابع باقیمانده باید گفت، به ازای هر یک واحدی که از متغیر $x_{۳}$ در مرحله اول تولید می‌شود، دو واحد از منبع اول و یک واحد از منبع دوم کسر می‌گردد(زیرا ضریب مصرف $x_{۳}$ در دو محدودیت به ترتیب برابر دو و یک است). به جهت محاسبات در جدول مثال زیر که مربوط به خانه‌ای از جدول می‌شود که پررنگ شده است ارائه می‌گردد:

$$f_{۲}\left\{(G_{۲},H_{۲})=(۸,۴),x_{۲}=۲\right\}=(۷\times ۲)+f_{۳}^{*}(۲)=۱۴+۶=۲۰$$

در حالتی که $x_{۲}=۲$ می‌باشد، ۶ واحد از منبع اول که در مثال فوق تنها ۸ واحد از آن باقی مانده و ۲ واحد از منبع دوم که در مثال فوق از آن ۴ واحد باقی مانده کسر می‌شود. زیرا در این مرحله داریم:

$$\begin{cases} x_{۱}+۳x_{۲}\le ۸ \\ x_{۱}+x_{۲}\le ۴ \end{cases} \to \begin{cases} x_{۱}\le ۸-۳x_{۲} \\ x_{۱}\le ۴-x_{۲} \end{cases} \xrightarrow{x_{۲}=۲} \begin{cases} x_{۱}\le ۲ \\ x_{۱}\le ۲ \end{cases} \to s_{۱}=۲ .$$

حال اگر $\begin{cases} x_{۱}\le ۲ \\ x_{۱}\le ۵ \end{cases}$ باید $s_{۱}=۲$ قرار می‌دادیم. زیرا می‌نیمم باقی‌مانده از دو منبع باید لحاظ گردد.

مرحله اول: مربوط به متغیر $x_{۳}$ می‌باشد.

$s_{۱}=(G_{۳},H_{۳})$ \ $x_{۳}$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$f_{۳}^{*}$	$x_{۳}^{*}$
(۱۲,۶)	۰+۳۰	۱+۲۴	۴+۲۰	۹+۱۴	۱۶+۱۰	۲۵+۳	۳۶+۰	۳۶	۶

به جهت توضیح جدول پیشین: وقتی $x_{۳}=۲$ قرار می‌دهیم، میزان باقی‌مانده برای استفاده مرحله بعدی

برابر است با: $(۸,۴)$ زیرا:

$$\begin{cases} ۳x_۲ + ۲x_۳ \le ۱۲ \\ x_۲ + x_۳ \le ۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳x_۲ \le ۱۲ - ۲x_۳ \\ x_۲ \le ۶ - x_۳ \end{cases} \xrightarrow{x_۳ = ۲} \begin{cases} ۳x_۲ \le ۸ \\ x_۲ \le ۴ \end{cases}$$

بنابراین به وضعیت $(۸,۴)$ مرحله ۲ خواهیم رفت. بطور خلاصه برای این مثال که در جدول پر رنگ شده است:

$$f_۱^* \{(۱۲,۶), x_۳ = ۲\} = ۲^۲ + f_۲^* \{(۸,۴)\} = ۴ + ۲۰ = ۲۴$$

بنابراین سیاست بهینه و ارزش بهینه برابر خواهد بود با:

$$x_۱^* = ۰ \ , \ x_۲^* = ۰ \ , \ x_۳^* = ۶ \ , \ z^* = ۳۶$$

مثال ۱۳. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\begin{aligned} &\max z = x_۱^۲ + ۲x_۲ \\ &s.t. \\ &x_۱ + x_۲ \le ۸ \\ &-x_۱ + x_۲ \le ۲ \\ &x_۱ - x_۲ \le ۶ \\ &x_۱ = ۰ \ or \ ۴ \ or \ ۶ \\ &x_۲ = ۰ \ or \ ۱ \end{aligned}$$

پاسخ: روش حل به صورت بازگشت به عقب (پسرو) می‌باشد. عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این سوال:

مرحله: به تعداد متغیرهای تصمیم مرحله داریم. بنابراین ۲ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: میزان باقیمانده از منابع برای استفاده در ابتدای هر مرحله. این متغیرهای حالت برای سه منبع را به ترتیب با a,b,c نشان می‌دهیم.

متغیر تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

این مساله برخلاف ظاهرش، بسیار ساده حل می‌شود. چون $x_۱$ تنها ۳ مقدار می‌گیرد و این کار را برای بدست آوردن تعداد حالات مرحله بعدی راحت‌تر می‌کند.

مرحله ۲: مربوط به متغیر $x_۲$

$x_۲$ / $s_۲$	۰	۱	$f_۲^*(s_۲)$	$x_۲^*$
$(۸,۲,۶)$	۰	۲	۲	۱
$(۴,۶,۲)$	۰	۲	۲	۱
$(۲,۸,۰)$	۰	۲	۲	۱

توضیح جدول پیشین: از آنجاییکه متغیر x_1 در مرحله یک، تنها مقادیر صفر، ۴ و یا ۶ را می‌گیرد، بنابراین مقدار باقیمانده برای مرحله ۲ بدین صورت بدست می‌آید:

$$x_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 \le 8 & (a) \\ x_2 \le 2 & (b) \\ -x_2 \le 6 & (c) \end{cases}$$

$$x_1 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_2 \le 4 & (a) \\ x_2 \le 6 & (b) \\ -x_2 \le 2 & (c) \end{cases}$$

$$x_1 = 6 \rightarrow \begin{cases} x_2 \le 2 & (a) \\ x_2 \le 8 & (b) \\ -x_2 \le 0 & (c) \end{cases}$$

مرحله ۱: مربوط به متغیر x_1 :

s_1 \ x_1	۰	۴	۶	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
(۸,۲,۶)	۰+۲	۱۶+۲	۳۶+۲	۳۸	۶

بنابراین داریم: $x_1^* = 6 \,,\, x_2 = 1 \,,\, z^* = 38$

مثال ۱۴. مساله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4^2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 10$$
$$x_1 \ge 2$$
$$x_2 \ge 3$$
$$x_j \ge 0 \,,\, j = 1,2,3,4$$ و عدد صحیح

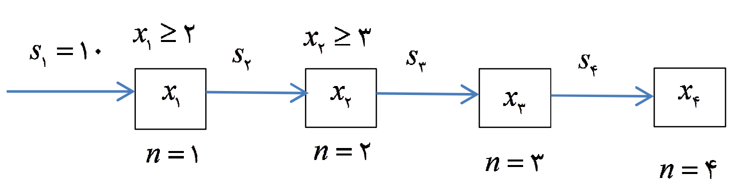
پاسخ: با توجه به توضیحات مثال صفحه ۵۱۸ مساله کوله پشتی و همچنین توضیحات مثال ۱۰ داریم:

روش حل به صورت بازگشت به عقب(پسرو) می‌باشد. عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این سوال:

مرحله: به تعداد متغیرهای تصمیم مرحله داریم. بنابراین ۴ مرحله داریم.

متغیر وضعیت: میزان باقیمانده از منابع در ابتدای مرحله i ام

متغیر تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.



$$\begin{cases} s_1 = 10 \\ s_2 = 10 - x_1 \quad , \quad x_1 \ge 2 \\ s_3 = s_2 - 2x_2 \;, \quad x_2 \ge 3 \\ s_4 = s_3 - x_3 \end{cases}$$

مرحله چهارم: مربوط به متغیر $x_۴$:

$x_۴$ / $s_۴$	۰	$f_۴^*(s_۴)$	$x_۴^*$
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰

توضیح جدول پیشین: با توجه به توضیحات مثال ۱۰ و توجه به محدودیت‌های دوم و سوم، باید حداقل ۲ واحد به $x_۱$ و حداقل ۳ واحد به $x_۲$ اختصاص یابد. با توجه به محدودیت اول یعنی $x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + ۴x_۴ \le ۱۰$ داریم:

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + ۴x_۴ \le ۱۰ \Rightarrow \quad x_۳ + ۴x_۴ \le ۱۰ - x_۱ - ۲x_۲ \Rightarrow x_۳ + ۴x_۴ \le ۱۰ - ۲ - ۲(۳)$$
$$\Rightarrow x_۳ + ۴x_۴ \le ۲$$

بنابراین برای مرحله چهارم داریم: $۴x_۴ \le ۲$. این بدان معناست که تعداد حالات باقیمانده از منبع برابر صفر و یک و دو می‌باشد. همچنین با توجه به توضیحات مساله کوله‌پشتی صفحه ۵۱۸ تنها مقداری که $x_۴$ می‌تواند بگیرد صفر می‌باشد. چرا؟

مرحله سوم: مربوط به متغیر $x_۳$:

$x_۳$ / $s_۳$	۰	۱	۲	$f_۳^*(s_۳)$	$x_۳^*$
۰	۰+۰	–	–	۰	۰
۱	۰+۰	۱+۰	–	۱	۱
۲	۰+۰	۱+۰	۲+۰	۲	۲

چرا متغیر $x_۳$ می‌تواند سه مقدار ۰,۱,۲ را بگیرد؟ توجه کنید که در مرحله سوم، محدودیت به صورت $x_۳ \le ۲$ می‌باشد.

مرحله دوم: مربوط به متغیر $x_۲$:

$x_۲$ / $s_۲$	۳	۴	$f_۲^*(s_۲)$	$x_۲^*$
۶	۳+۰	–	۳	۳
۷	۳+۱	–	۴	۳
۸	۳+۲	۴+۰	۵	۳

مرحله یک: مربوط به متغیر $x_۱$:

$x_۱$ \ $s_۱$	۲	۳	۴	$f_۱^*(s_۱)$	$x_۱^*$
۱۰	۴+۵	۶+۴	۸+۳	۱۱	۴

سیاست بهینه: $x_۱^* = ۴\ ,\ x_۲^* = ۳\ ,\ x_۳^* = ۰\ ,\ x_۴^* = ۰\ ,\ z^* = ۱۱$

مثال ۱۵. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = ۱۳x_۱ - x_۱^۲ + ۳۰{,}۲x_۲ - ۵x_۲^۲ + ۱۰x_۳ - ۲{,}۵x_۳^۲$$
$$s.t.$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ \le ۱۰$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۵$$
$$x_j \ge ۰\ ,\ j = ۱,۲,۳ \quad \text{و عدد صحیح}$$

پاسخ: این مساله همانند مثال ۱۲ می‌باشد. ابتدا عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این مثال عنوان می‌گردند:

حل به روش بازگشت به عقب می‌باشد.

مرحله: هر یک از متغیرها یک مرحله هستند. ۳ مرحله داریم.

متغیر وضعیت(حالت): میزان منابع باقیمانده (سمت راست محدودیت‌ها در ابتدای هر مرحله که برای محدودیت اول و دوم به ترتیب با b, a نشان داده می‌شود.

متغیر تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

مرحله سوم: مربوط به متغیر $x_۳$:

$x_۳$ \ $s_۳ = (a,b)$	۰	۱	۲	$f_۳^*(s_۳)$	$x_۳^*$
$۰ \le a \le ۴, b \ge ۰$ $a \ge ۰, b = ۰$	۰	-	-	۰	۰
$۶ \le a \le ۹\ ,\ b \ge ۱$ $a \ge ۵\ ,\ b = ۱$	۰	۷/۵	-	۷/۵	۱
$a = ۱۰, b \ge ۲$	۰	۷/۵	۱۰	۱۰	۲

توضیح جدول پیشین: چون در مرحله سوم $\begin{cases} 5x_3 \le 10 \\ x_3 \le 5 \end{cases}$ می‌باشد و از طرفی x_3 تنها مقادیر صحیح و مثبت به خود می‌گیرد، تنها مقادیری که x_3 می‌تواند بگیرد صفر و یک و دو می‌باشد. برای متغیر حالت هم می‌توان کلیه حالتها را درنظر گرفت. اما نیازی به این کار نیست. زیرا مثلا حالتی که $a = 2,\ b = 5$ باشد هیچ تفاوتی با حالتی که $a = 3, b = 5$ باشد ندارد و در هر دو حالت مقدار x_3 برابر صفر خواهد بود زیرا برای این حالت خواهیم داشت: $\begin{cases} 5x_3 \le a \\ x_3 \le b \end{cases}$ و اگر $a \le 4$ باشد و b هرچه باشد، x_3 تنها می‌تواند مقدار صفر به خود بگیرد. برای سایر حالتها هم به همین صورت می‌توان تحلیل کرد و دلیل آنکه متغیر حالت به این صورت نوشته شد را بدست آورد.

مرحله دوم: مربوط به متغیر x_1:

x_2 / $s_2 = (a,b)$	۰	۱	۲	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
$(10,5)$	۱۰	۳۲٫۷	۴۰٫۴	۴۰٫۴	۲
$(8,4)$	۷٫۵	۲۵٫۲	۴۰٫۴	۴۰٫۴	۲
$(6,3)$	۷٫۵	۲۵٫۲	-	۲۵٫۲	۱
$(4,2)$	۰	۲۵٫۲		۲۵٫۲	۱
$(2,1)$	۰	-	-	۰	۰
$(0,0)$	۰	-	-	۰	۰

توضیح جدول پیشین: در مرحله دوم، محدودیت‌ها به صورت $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$ می‌باشند. حال هر چه x_1 در مرحله اول، مقدار صحیح بیشتری بگیرد از مقدار باقیمانده از منبع برای مرحله دوم کاسته می‌شود. به طور مثال، اگر $x_1 = 3$ باشد، $\begin{cases} 4x_2 \le 10 - 2(3) \\ x_2 \le 5 - (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_2 \le 10 - 2x_1 \\ x_2 \le 5 - x_1 \end{cases}$ که همان حالت $(a,b) = (4,2)$ جدول پیشین است. به جهت توضیح اعداد بدست آمده در جدول، خانه‌ای که پررنگ شده است را درنظر بگیرید: چون $(a,b) = (4,2)$ می‌باشد، یعنی $\begin{cases} 4x_2 \le 4 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$ بنابراین حداکثر مقداری که x_2 می‌تواند بگیرد برابر ۱ است. خواهیم داشت:

$$f_{۲}\left\{(۴,۲), x_{۲}=۰\right\}=\{(۳۰/۲)(۰)-۵(۰)^{۲}\}+f_{۳}^{*}\left\{(a,b)=(۴,۲)\right\}=۰$$

مرحله اول: مربوط به متغیر $x_{۱}$:

$x_{۱}$ \ (a,b)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	$f_{۱}^{*}(s_{۱})$	$x_{۱}^{*}$
$(۱۰,۵)$	$۰+۴۰/۴$	$۱۲+۴۰/۴$	$۲۲+۲۵/۲$	$۳۰+۲۵/۲$	$۳۶+۰$	$۴۰+۰$	$۵۵/۲$	۳

سیاست بهینه: $x_{۱}^{*}=۳\ ,\ x_{۲}^{*}=۱\ ,\ x_{۳}^{*}=۰\ ,\ z^{*}=۵۵/۲$

مثال ۱۶. مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\begin{aligned}&\max z=۴x_{۱}+۱۴x_{۲}\\&s.t.\\&۲x_{۱}+۷x_{۲}\le ۲۱\\&۷x_{۱}+۲x_{۲}\le ۲۱\\&x_{۱},x_{۲}\ge ۰\end{aligned}$$

پاسخ: این سوال همانند مثال صفحه ۵۲۳ می‌باشد. در این سوال از روش پسرو استفاده می‌کنیم. البته می‌توانستیم از روش پیشرو هم استفاده کنیم. همانطور که می‌دانیم، به تعداد متغیر، مرحله و به تعداد محدودیت، متغیر حالت داریم.

متغیرهای حالت:

a_i: میزان باقیمانده از منبع اول در ابتدای مرحله iام

b_i: میزان باقیمانده از منبع دوم در ابتدای مرحله iام

متغیرهای تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

مرحله دوم: مربوط به متغیر $x_{۲}$

$$\begin{cases}۲x_{۱}+۷x_{۲}\le ۲۱\\ ۷x_{۱}+۲x_{۲}\le ۲۱\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۷x_{۲}\le \underbrace{۲۱-۲x_{۱}}_{a_{۲}}\\ ۲x_{۲}\le \underbrace{۲۱-۷x_{۱}}_{b_{۲}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۷x_{۲}\le a_{۲}\\ ۲x_{۲}\le b_{۲}\end{cases}$$

بر طبق مفاهیم برنامه‌ریزی خطی داریم: $0 \le x_2 \le \min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)$ بنابراین خواهیم داشت:

s_2 \ x_2	$0 \le x_2 \le \min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)$ $f_2(s_2)=14x_2$	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
(a_2,b_2)	$14\times\min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)$	$\max\left\{14\times\min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)\right\}$	$\min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)$

$$\min\left(\underbrace{\frac{21-2x_1}{7}}_{a_2},\underbrace{\frac{21-7x_1}{2}}_{b_2}\right) \Rightarrow \frac{21-2x_1}{7}=\frac{21-7x_1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{7}{3}$$

مرحله اول: مربوط به متغیر x_1:

برطبق محدودیت‌ها داریم:

$$\begin{cases} 2x_1 \le 21 \\ 7x_1 \le 21 \end{cases} \rightarrow 0 \le x_1 \le 3$$

s_1 \ x_1	$f_1(s_1)=4x_1+f_2^*\{(a_2,b_2)\}$	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
$(a_1,b_1)=(21,21)$	$4x_1+14\times\min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)$	$\max\left\{4x_1+14\times\min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)\right\}$	***

برای بدست آوردن *** بصورت زیر عمل می‌شود:

برطبق آنچه که در مرحله دوم یعنی $x_1=\frac{7}{3}$ بدست آمد داریم:

$$\max z = 4x_1 + 14\times\min\left(\frac{a_2}{7},\frac{b_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \max z = 4x_1 + 14\begin{cases} \frac{21-2x_1}{7} & ,\ 0 \le x_1 \le \frac{7}{3} \\ \frac{21-7x_1}{2} & ,\ \frac{7}{3} \le x_1 \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42 & ,\ 0 \le x_1 \le \frac{7}{3} \\ -45x_1+147 & ,\ \frac{7}{3} \le x_1 \le 3 \end{cases}$$

با رسم دو خط $\begin{cases} ۴۲ & , \quad ۰ \le x_۱ \le \frac{۷}{۳} \\ -۴۵x_۱ + ۱۴۷ & , \quad \frac{۷}{۳} \le x_۱ \le ۳ \end{cases}$ خواهیم داشت: نقطه بهینه برابر $x_۱ = ۰$ و یا $x_۱ = \frac{۷}{۳}$ با مقدار تابع هدف $z^* = ۴۲$ خواهد بود. همچنین از آنجاییکه نقطه بهینه برابر $x_۱ = ۰$ و یا $x_۱ = \frac{۷}{۳}$ بدست آمده است.

برای $x_۲$ خواهیم داشت:

$$x_۲ = \min(\frac{a_۲}{۷}, \frac{b_۲}{۲})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۰ \to x_۲ = \min(\frac{a_۲}{۷}, \frac{b_۲}{۲}) = \min(\frac{۲۱-۲x_۱}{۷}, \frac{۲۱-۷x_۱}{۲}) \to x_۲ = \min(۳, \frac{۲۱}{۲}) = ۳ \\ x_۱ = \frac{۷}{۳} \to x_۲ = \min(\frac{a_۲}{۷}, \frac{b_۲}{۲}) = \min(\frac{۲۱-۲x_۱}{۷}, \frac{۲۱-۷x_۱}{۲}) \to x_۲ = \min(\frac{۷}{۳}, \frac{۷}{۳}) = \frac{۷}{۳} \end{cases}$$

بنابراین مساله دارای جواب بهینه چندگانه خواهد بود.

مثال۱۷. یک کارگاه تولیدی می‌تواند سه نوع محصول را مطابق اطلاعات جدول زیر تولید نماید. در صورتیکه از محصوات ۱و۲ به ترتیب حداقل ۲،۱ واحد تولید شود و حداکثر ماده اولیه در دسترس ۱۵ واحد باشد با استفاده از برنامه‌ریزی پویا سیاست بهینه را تعیین کنید.

محصول	ماده اولیه مورد نیاز برای سود هر واحد محصول	سود هر واحد محصول
۱	۲	۵
۲	۱	۳
۳	۳	۷

پاسخ: مدل برنامه‌ریزی خطی این مساله به صورت زیر است:

$$\max z = ۵x_۱ + ۳x_۲ + ۷x_۳$$
$$۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \le ۱۵$$
$$x_۱ \ge ۱$$
$$x_۲ \ge ۲$$
$$x_۳ \ge ۰$$

به پاسخ مثال ۱۰ دقت کنید. برای حل مساله به روش برنامه‌ریزی پویا داریم:
همانند سوالهای پیشین این مساله را به روش بازگشت به عقب حل می‌کنیم.

متغیر حالت: a_i: میزان باقیمانده از منبع اول در ابتدای مرحله iام
متغیرهای تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
مرحله سوم: مربوط به متغیر $x_۳$
برطبق محدودیت اول داریم:

$$۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \le ۱۵ \to ۳x_۳ \le \underbrace{۱۵ - ۲x_۱ - x_۲}_{a_۳}$$

و چون حداقل مقدار $x_۲, x_۱$ به ترتیب برابر ۱ و ۲ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$۳x_۳ \le \underbrace{۱۵ - ۲x_۱ - x_۲}_{a_۳} \to ۳x_۳ \le \underbrace{۱۵ - ۲(۱) - (۲)}_{a_۳}$$

$$\Rightarrow ۰ \le a_۳ \le ۱۱ \;,\; ۰ \le ۳x_۳ \le a_۳ \quad , ۰ \le x_۳ \le \frac{a_۳}{۳}$$

$x_۳$ / $s_۳$	$f_۳(s_۳) = ۷x_۳$	$f_۳^*(s_۳)$	$x_۳^*$
$۰ \le a_۳ \le ۱۱$	$۷x_۳$	$\max(۷x_۳) = ۷(\frac{a_۳}{۳})$	$(\frac{a_۳}{۳})$

دقت کنید که $۰ \le x_۳ \le \frac{a_۳}{۳}$ اما چون هدف ماکزیمم‌سازی است بنابراین به جای $x_۳$ بیشترین مقدار ممکن یعنی $(\frac{a_۳}{۳})$ قرار داده می‌شود.

مرحله دوم: مربوط به متغیر $x_۲$
برطبق محدودیت اول داریم:

$$x_۲ \le ۱۵ \to \le \underbrace{۱۵ - ۲x_۱}_{a_۲}$$

و چون حداقل مقدار $x_۱$ برابر ۱ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$x_۲ \le \underbrace{۱۵ - ۲x_۱}_{a_۲} + \to x_۲ \le \underbrace{۱۵ - ۲(۱)}_{a_۲} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ۲ \le a_۲ \le ۱۳ \\ ۲ \le x_۲ \end{array}\right\} ۲ \le x_۲ \le a_۲$$

$s_۲ \backslash x_۲$	$f_۲(s_۲)=۳x_۲+f_۳^*(a_۳)$	$f_۲^*(s_۲)$	$x_۲^*$
$۲\le a_۲\le ۱۳$	$۳x_۲+۷(\frac{a_۳}{۳})=۳x_۲+۷(\frac{a_۲-x_۲}{۳})=\frac{۲}{۳}x_۲+\frac{۷}{۳}a_۲$	$۳a_۲$	$a_۲$

دقت کنید که $۲\le x_۲\le a_۲$ اما چون هدف ماکزیمم‌سازی است بنابراین به جای $x_۲$ بیشترین مقدار ممکن یعنی $a_۲$ قرار داده می‌شود.

مرحله اول: مربوط به متغیر $x_۲$

برطبق محدودیت اول داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_۱\ge ۱ \\ ۲x_۱\le ۱۵-x_۲ \\ x_۲\ge ۲ \end{array}\right\}\rightarrow ۱\le x_۱\le \frac{۱۳}{۲}$$

$s_۱ \backslash x_۱$	$f_۱(s_۱)=۵x_۱+f_۲^*(a_۲)$	$f_۱^*(s_۱)$	$x_۱^*$
$a_۱=۱۵$	$۵x_۱+۳a_۲=۵x_۱+۳(۱۵-۲x_۱)=-x_۱+۴۵$	۴۴	۱

دقت کنید که $۱\le x_۱\le \frac{۱۳}{۲}$ اما چون هدف ماکزیمم سازی است بنابراین به جای $x_۱$ کمترین مقدار ممکن یعنی ۱ قرار داده می‌شود زیرا ضریب آن منفی است.

سیاست بهینه:

$$x_۱^*=۱\Rightarrow a_۲=۱۵-۲x_۱=۱۵-۲=۱۳\Rightarrow x_۲^*=۱۳\ ,$$
$$\Rightarrow a_۳=a_۲-x_۲=۱۳-۱۳=۰\Rightarrow x_۳^*=۰$$
$$\Rightarrow z^*=۴۴$$

مثال ۱۸. مساله برنامه‌ریزی غیر خطی زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z=x_۱^۲+۲x_۲^۲+۴x_۳$$
$$x_۱+۲x_۲+x_۳\le ۸$$
$$x_j\ge ۰\ ,\ j=۱,۲,۳$$

پاسخ: این سوال همانند مثال ۵۳۳ می‌باشد. عناصر برنامه‌ریزی پویا:

مرحله: ۳ مرحله داریم زیرا ۳ متغیر داریم.

متغیر حالت: a_i: میزان باقیمانده از منبع اول در ابتدای مرحله i ام

متغیرهای تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

مرحله ۳: مربوط به متغیر $x_۳$

طبق محدودیت اول داریم: $x_۱+۲x_۲+x_۳ \le ۸ \to x_۳ \le \underbrace{۸-x_۱-۲x_۲}_{a_۳} \Rightarrow ۰ \le x_۳ \le a_۳$

$s_۳ \backslash x_۳$	$f_۱(s_۱)=۴x_۳$	$f_۳^*(s_۳)=\max\{f_۳(s_۳,x_۳)\}$	$x_۳^*$
$۰ \le a_۳ \le ۸$	$۴x_۳$	$۴a_۳$	$a_۳$

چرا با اینکه $۰ \le x_۳ \le a_۳$ بود اما $x_۳$ را برابر $a_۳$ قرار دادیم؟

مرحله ۲: مربوط به متغیر $x_۲$

طبق محدودیت اول داریم: $x_۱+۲x_۲+x_۳ \le ۸ \to ۲x_۲ \le \underbrace{۸-x_۱}_{a_۲} \Rightarrow ۰ \le x_۲ \le \frac{a_۲}{۲}$

$s_۲ \backslash x_۲$	$۰ \le x_۲ \le \frac{a_۲}{۲}$ $۲x_۲^۲+f_۳^*(a_۳)$	$f_۲^*(s_۲)=\max\{f_۱(s_۲,x_۲)\}$	$x_۲^*$
$۰ \le a_۲ \le ۸$	$۲x_۲^۲+۴a_۳=۲x_۲^۲+۴(a_۲-۲x_۲)$ $=۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲$	$۴a_۲$	۰

چرا با اینکه $۰ \le x_۲ \le \frac{a_۲}{۲}$ بود اما $x_۲$ را برابر صفر قرار دادیم؟ چون باید تابع $۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲$ حداکثر گردد. با مشتق‌گیری از تابع بر حسب $x_۲$ داریم:

$$(۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲)'=۴x_۲-۸=۰ \to x_۲=۲$$

حال باید ۳ نقطه ابتدا (یعنی صفر)، انتها یعنی $\frac{a_۲}{۲}$ و نقطه $x_۲=۲$ را در تابع $۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲$ قرار داد تا ببینیم به ازای کدام نقطه، تابع هدف بیشتر خواهد شد:

$$۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲=\begin{cases} x_۲=۰\rightarrow ۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲=۴a_۲ \\ x_۲=۲\rightarrow ۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲=-۸+۴a_۲ \\ x_۲=\dfrac{a_۲}{۲}\rightarrow ۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲=\dfrac{a_۲^۲}{۲} \end{cases}$$

چون به ازای $x_۲=۰$ تابع $۲x_۲^۲-۸x_۲+۴a_۲$ بیشترین مقدار را گرفته است، قرار می‌دهیم $x_۲=۰$

مرحله ۱: مربوط به متغیر $x_۱$

طبق محدودیت اول داریم: $x_۱+۲x_۲+x_۳\leq ۸\Rightarrow x_۱\leq ۸\ \Rightarrow ۰\leq x_۱\leq ۸$

$x_۱$ / $s_۱$	$x_۱^۲+f_۲^*(a_۲)$	$f_۱^*(s_۱)=\max\{f_۱(s_۱,x_۱)\}$	$x_۱^*$
$a_۱=۸$	$x_۱^۲+f_۲^*(a_۲)=x_۱^۲+۴a_۲=x_۱^۲+۴(۸-x_۱)$	۶۴	۸

خودتان بگوئید چرا $x_۱$ را برابر ۸ قرار دادیم؟

بنابراین سیاست بهینه برابر است با:

$$x_۱^*=۸\Rightarrow a_۲=۸-x_۱=۸-۸=۰\Rightarrow x_۲^*=۰\ ,$$

$$\Rightarrow a_۳=a_۲-۲x_۲=۰-۰=۰\Rightarrow x_۳^*=۰$$

$$\Rightarrow z^*=۶۴$$

مثال ۱۹. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z=۳x_۱+۷x_۲+۲f(x_۳)$$

$$x_۱+۳x_۲+۲x_۳\leq ۶$$

$$x_۱+x_۲\leq ۵$$

$$x_j\geq ۰\quad j=۱,۲,۳$$

$$f(x_۳)=\begin{cases} ۰ & x_۳=۰ \\ -۲+۳x_۳ & x_۳>۰ \end{cases}$$

پاسخ: حل به روش پسرو است و عناصر برنامه‌ریزی پویا برای حل این مساله:

مرحله: ۳ مرحله به دلیل داشتن ۳ متغیر

متغیر وضعیت: میزان منابع باقیمانده در ابتدای هر مرحله که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

a_i: میزان باقیمانده از منبع اول در ابتدای مرحله i ام

b_i: میزان باقیمانده از منبع دوم در ابتدای مرحله iام

متغیرهای تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

مرحله سوم: مربوط به متغیر x_3

$s_3 \backslash x_3$	$f_3\{(a_3,b_3),x_3\} = 2f(x_3)$		$f_3^*(s_3) = \max\{f_3\{(a_3,b_3),x_3\}\}$	x_3^*
	$x_3 \le 1$	$1 \le x_3 \le a_3$		
$0 \le a_3 \le 6$	0	$2f(x_3) = 2(-3+3a_3)$	$2\max(0,(-3+3a_3))$	$\max(0,a_3)$

توجه به چند نکته در مورد جدول پیشین اهمیت دارد:

- چرا برای متغیر حالت تنها a_3 را درنظر گرفتیم و b_3 را درنظر نگرفتیم؟ چون اگر به محدودیت‌های مساله توجه کنید، x_3 در محدودیت دوم اصلاً حضور ندارد. بنابراین اینکه چه میزان از منبع دوم باقی‌مانده باشد اثری بر تولید x_3 ندارد.
- چرا برای متغیر تصمیم x_3 دو بازه‌ی $x_3 \le 1$ و $1 \le x_3 \le a_3$ را بطور جداگانه بررسی کردیم(برخلاف مثالهای پیشین)؟ چون به ازای $x_3 = 0$ با توجه به $f(x_3) = \begin{cases} 0 & x_3 = 0 \\ -3+3x_3 & x_3 > 0 \end{cases}$ مقدار $f(x_3) = 0$ است. به ازای مقادیر $x_3 < 1$ رابطه پایین برقرار است یعنی $x_3 > 0 \quad f(x_3) = -3+3x_3$. اما چون به ازای $0 < x_3 \le 1$ مقدار تابع صفر و یا منفی می‌شود و ما به دنبال ماکزیمم‌سازی هستیم، بنابراین بهترین حالت برای این شرایط مقدار $f(x_3) = 0$ را نتیجه خواهد داد. سایر روابط هم که پیش از این توضیح داده شده‌اند.

مرحله دوم: مربوط به متغیر x_2

$s_2 \backslash x_2$	$0 \le x_2 \le \min(\frac{a_2}{3}, b_2)$	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	$f_2\{(a_2,b_2),x_2\} = 7x_2 + f_3^*(s_3)$		
$0 \le a_2 \le 6$ $0 \le b_2 \le 5$	$7x_2 + f_3^*(s_3) =$ $7x_2 + 2\max(0,-3+3(a_2-3x_2))$		$\min(\frac{a_2}{3}, b_2)$

به دنبال ماکزیمم کردن $۷x_۲+۲\max(۰,-۳+۳(a_۲-۳x_۲))$ هستیم. از طرفی با توجه به محدودیت‌های مساله در مرحله دوم یعنی $\begin{cases} x_۱+۳x_۲\le a_۲ \\ x_۱+x_۲\le b_۲ \end{cases}$ میزان منبع باقیمانده برای استفاده در مرحله ۲ برابر است با: $\begin{cases} a_۲=a_۱-x_۱\to a_۲=۶-x_۱ \\ b_۲=b_۱-x_۱\to b_۲=۵-x_۱ \end{cases}$ و همچنین داریم $\begin{cases} ۳x_۲\le a_۲-x_۱ \\ x_۲\le b_۲-x_۱ \end{cases}$ یعنی $۰\le x_۲\le \min(\frac{a_۲}{۳},b_۲)$. با توجه به $x_۲=\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲)$ و همچنین $a_۲=۶-x_۱\ ,\ b_۲=۵-x_۱$ داریم:

$$۷x_۲+۲\max(۰,-۳+۳(a_۲-۳x_۲))=۷(\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲))+۲\max(۰,-۳+۳(a_۲-۳\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲))=$$
$$۷(\min(\frac{۶-x_۱}{۳},۵-x_۱))+۲\max(۰,-۳+۳(۶-x_۱-۳\min(\frac{۶-x_۱}{۳},۵-x_۱))$$

حال باید $\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲)=\min(\frac{۶-x_۱}{۳},۵-x_۱)$ را بدست آورد. همانند راه حل مثال صفحه ۵۲۳ داریم:

$$\frac{۶-x_۱}{۳}=۵-x_۱\Rightarrow x_۱=\frac{۹}{۲}$$

پس خواهیم داشت:

اگر $۰\le x_۱\le\frac{۹}{۲}$:

$$f_۲^*(s_۲)=۷(\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲))+۲\max(۰,-۳+۳(a_۲-۳\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲))=$$
$$۷(\frac{۶-x_۱}{۳})+۲\max(۰,-۳+۳(۶-x_۱-۳(\frac{۶-x_۱}{۳})=\frac{۴۲}{۳}-\frac{۷}{۳}x_۱+۰$$

و اگر $\frac{۹}{۲}\le x_۱\le ۵$ باشد (چرا گفتیم $x_۱\le ۵$ ؟ با توجه به محدودیت دوم، $x_۱$ نمی‌تواند بیشتر از ۵ باشد.) :

$$۷(\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲))+۲\max(۰,-۳+۳(a_۲-۳\min(\frac{a_۲}{۳},b_۲))=$$
$$۷(۵-x_۱)+۲\max(۰,-۳+۳(۶-x_۱-۳(۵-x_۱)=۳۵-۷x_۱+۰$$

مرحله ۱: برای متغیر x_1 :

s_1 \ x_1	$f_1\{(a_1,b_1),x_1\}=3x_1+f_2^*(s_2)$		$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	$0\le x_1\le \min(6,5)=5$			
	$0\le x_1\le \frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}\le x_1\le 5$		
$a_1=6$ $b_1=5$	$(1):\ 3x_1+f_2^*(s_2)=$ $3x_1+\frac{42}{3}-\frac{7}{3}x_1$	$(2):\ 3x_1+f_2^*(s_2)=$ $3x_1+35-7x_1$	$\max\{(1),(2)\}=17$	$\frac{9}{2}$

برای بدست آوردن $\max\{(1),(2)\}$ باید با استفاده از ترسیم هندسی (مثال صفحه ۵۲۳ را نگاه بیندازید)

نقطه ماکزیمم را بدست آورد که این نقطه برابر است با محل تلاقی دو خط یعنی $x_1=\frac{9}{2}$

بنابراین سیاست بهینه بدین صورت است:

$$\begin{cases} a_1=6 \\ b_1=5 \end{cases},\ x_1^*=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2} \\ b_2=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow x_2^*=\min(\frac{a_2}{3},b_2)=\min(\frac{\frac{3}{2}}{3},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0 \rightarrow x_3^*=0$$

$$\Rightarrow z^*=17$$

✍ **تمرین.** مساله زیر را با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z=6x_1+5x_2+10x_3$$
$$4x_1+2x_2+x_3\le 19$$
$$x_1\ge 2$$
$$x_2\ge 3$$
$$x_3\ge 0$$

پاسخ: سیاست بهینه:

$$x_۱^* = ۲ \Rightarrow s_۲ = ۱۹ - ۴(۲) = ۱۱ \Rightarrow x_۲^* = ۳ \ , \ s_۳ = ۱۱ - ۲(۳) = ۵ \Rightarrow x_۳^* = ۵$$

$$\Rightarrow z^* = ۷۷$$

تمرین. مساله برنامه‌ریزی غیر خطی زیر را با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = ۵x_۱^۲ + x_۱ + ۳x_۲^۲$$
$$x_۱ + ۳x_۲ \le ۸$$
$$۲x_۱ + ۵x_۲ \le ۱۴$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

جواب: به راه حل مثال صفحه ۵۳۳ و یا مثال‌های بعدی دقت کنید.

$$n = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۸ \\ b_۱ = ۱۴ \end{cases}, \ x_۱^* = ۷$$

$$n = ۲ \Rightarrow \begin{cases} a_۲ = a_۱ - x_۱ = ۸ - ۷ = ۱ \\ b_۲ = b_۱ - ۲x_۲ = ۱۴ - ۲(۷) = ۰ \end{cases} \Rightarrow x_۲^* = \min(\frac{۱}{۳}, ۰) = ۰$$

$$\Rightarrow z^* = ۲۵۲$$

مثال ۲۰. مساله برنامه‌ریزی غیر خطی زیر را به روش برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = x_۱^۲ x_۲$$
$$x_۱^۲ + x_۲ \le ۲$$

$x_۱, x_۲$ متغیرهای آزاد در علامت

پاسخ: عناصر برنامه‌ریزی پویا برای حل این مساله:

مرحله: ۲ مرحله داریم زیرا ۲ متغیر داریم.

متغیر حالت: a_i: میزان باقیمانده از منبع اول در ابتدای مرحله iام

متغیرهای تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

دقت کنید که متغیرهای مساله، نامقید هستند.

مرحله ۲: مربوط به متغیر $x_۲$:

طبق محدودیت اول داریم:

$$x_۱^۲ + x_۲ \le ۲ \rightarrow x_۲ \le \underbrace{۲ - x_۱^۲}_{a_۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ \ge \sqrt{۲} \ \rightarrow \ a_۲ \le ۰ \\ x_۱ \ge \sqrt{۲} \ \rightarrow \ a_۲ \ge ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ a_۲ = a_۱ - x_۱^۲ \ , \ \ -\infty \le x_۲ \le a_۲$$

x_2 / s_2	$-\infty \le x_2 \le a_2$ $f_2(s_2,x_2)=x_2$	$f_2^*(s_2)=\max\{f_2(s_2,x_2)\}$	x_2^*
$a_2 \le 0$	x_2	a_2	a_2
$a_2 \ge 0$	x_2	a_2	a_2

توضیح جدول پیشین: اگر $a_2 \le 0$ باشد، یعنی محدودیت اول مساله به صورت $x_2 \le a_2$ است که a_2 منفی می‌باشد. به دلیل آنکه تابع هدف مساله ماکزیمم سازی است، بهتر است که x_2 را برابر a_2 قرار دهیم. به همین صورت اگر $a_2 \ge 0$ باشد، یعنی محدودیت اول مساله به صورت $x_2 \le a_2$ است که a_2 مثبت می‌باشد. به دلیل آنکه تابع هدف مساله ماکزیمم سازی است، بهتر است که x_2 را برابر a_2 قرار دهیم. در واقع می‌توانستیم جدول قبل را به صورت زیر هم نمایش دهیم:

x_2 / s_2	$-\infty \le x_2 \le a_2$ $f_2(s_2,x_2)=x_2$	$f_2^*(s_2)=\max\{f_2(s_2,x_2)\}$	x_2^*
a_2	x_2	a_2	a_2

مرحله اول: مربوط به متغیر x_1 :

طبق محدودیت اول داریم:

$$x_1^2 \le 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \le x_1 \le \sqrt{2}$$

x_1 / s_1	$-\sqrt{2} \le x_1 \le \sqrt{2}$ $f_1(s_1,x_1)=x_1^2\times f_2^*(s_2)$	$f_1^*(s_1)=\max\{f_1(s_1,x_1)\}$	x_1^*
$a_1=2$	$x_1^2x_2=x_1^2\times a_2=$ $x_1^2\times(a_1-x_1^2)=x_1^2\times(2-x_1^2)$	$\max\ x_1^2\times(2-x_1^2)=1$	$x_1^*=-1$ یا $x_1^*=1$

توضیح جدول فوق:

- در ابتدای مرحله اول هستیم، بنابراین تمام منابع را در اختیار داریم یعنی $a_1=2$
- تابع بازگشتی مساله برابر است با: $f_1(s_1,x_1)=x_1^2\times f_2^*(s_2)$ و طبق جدول مرحله دوم بهترین حالت $f_2^*(s_2)$ برابر است با a_2 . بنابراین داریم: $x_1^2\times f_2^*(s_2)=x_1^2\times a_2$ و به دلیل آنکه $a_2=a_1-x_1^2$ خواهیم داشت: $x_1^2\times(a_1-x_1^2)$
- به دنبال ماکزیمم سازی هستیم بنابراین باید ماکزیمم $f_1(s_1,x_1)=x_1^2\times f_2^*(s_2)$ را به عنوان ارزش بهینه انتخاب کنیم. بنابراین داریم: $\max\ x_1^2\times(2-x_1^2)$ و طبق مفاهیم

برنامه ریزی غیرخطی، باید نسبت به x_1 مشتق بگیریم و سپس نقاط ابتدا و انتهایی بازه و جایی که شیب تابع صفر می‌شود را در تابع هدف قرار داد و نقطه‌ای که بیشترین مقدار را به تابع هدف می‌دهد را به عنوان نقطه بهینه انتخاب کرد:

$$(x_1^2\times(2-x_1^2))'=(2x_1^2-x_1^4)'=4x_1-4x_1^3=4x_1(1-x_1^2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_1=-1\\x_1=+1\end{cases}$$

و به ازای این نقاط داریم:

$$x_1^2\times(2-x_1^2)\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\rightarrow 0^2\times(2-0)=0\\x_1=-1\rightarrow(-1)^2\times(2-(-1)^2)=1\\x_1=+1\rightarrow(1)^2\times(2-(1)^2)=1\end{cases}$$

مثال ۲. مساله برنامه‌ریزی غیر خطی زیر درنظر بگیرید. اگر بخواهیم این مساله را با تکنیک برنامه‌ریزی پویا حل کنیم. مرحله، متغیر تصمیم، حالت، شرط کمکی و معادلات تکراری در هر مرحله را در حالت بازگشت به عقب بیان کرده و مساله را حل کنید.

$$\max z=12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12x_2-x_2^3$$
$$x_1+x_2\le 3$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

پاسخ: عناصر برنامه‌ریزی پویا برای حل این مساله:

مرحله: ۲ مرحله داریم زیرا ۲ متغیر داریم.

متغیر حالت: a_i میزان باقیمانده از منبع در ابتدای مرحله iام

متغیرهای تصمیم: مقداری که x_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

چون حرکت رو عقب می‌باشد:

مرحله دوم: متغیر x_2:

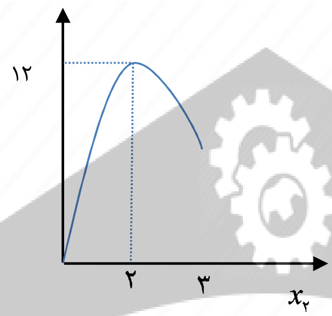
با توجه به اینکه ضریب مصرف x_1 برابر یک است، اگر مقدار باقیمانده از محدودیت در ابتدای مرحله اول a_1 باشد، مقدار باقیمانده در ابتدای مرحله دوم، a_1-x_1 است. $a_2=a_1-x_1$ و داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2\le 3\\x_2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2\le\underbrace{3-x_1}_{a_2}\\x_2\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le x_2\le a_2$$

با توجه به مثالهای پیشین، تابع هدف مساله در این مرحله به صورت $f_2(a_2, x_2) = 12x_2 - x_2^3$ است. و هدف بیشینه کردن تابع هدف در این مرحله است:

$$(12x_2 - x_2^3)' = 12 - 3x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

و با توجه به شکل و یا جهت تقعر می‌توان گفت که: اگر $0 \le a_2 \le 2$ باشد، بهترین حالت این است که تا می‌توانیم به x_2 مقدار دهیم یعنی $x_2 = a_2$ ولی اگر $2 \le a_2 \le 3$ باشد از آنجا که روند تابع به ازای $x_2 \ge 2$ نزولی است پس بهتر است $x_2 = 2$ باشد.



بنابراین دو حالت $0 \le a_2 \le 2$ و $2 \le a_2 \le 3$ باید بطور جداگانه بررسی شوند:

s_2 \ x_2	$f_2(s_2, x_2) = 12x_2 - x_2^3$		$f_2^*(s_2) = \max\{f_2(s_2, x_2)\}$	x_2^*
	$0 \le x_2 \le a_2$	$2 \le x_2 \le 3$		
$0 \le a_2 \le 2$	$12x_2 - x_2^3$	$-$	$12a_2 - a_2^3$	a_2
$2 \le a_2 \le 3$	$-$	$12x_2 - x_2^3$	$12(2) - (2)^3 = 16$	2

مرحله اول: مربوط به متغیر x_1 :

s_1 \ x_1	$f_1(s_1,x_1)=12x_1+3x_1^2-2x_1^3+f_2^*(s_2=s_1-x_1)$		$f_1^*(s_1)=\max\{f_1(s_1,x_1)\}$	x_1^*
	$0\le x_1\le 1$	$1\le x_1\le 3$		
$a_1=3$	$12x_1+3x_1^2-2x_1^3$ $+f_2^*(a_2=3-x_1)=$ $12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16$	$12x_1+3x_1^2-2x_1^3+$ $f_2^*(a_2=3-x_1)=$ $12x_1+3x_1^2-2x_1^3$ $+12a_2-a_2^3=$ $12x_1+3x_1^2-2x_1^3$ $+12(3-x_1)-(3-x_1)^3$	۳۲/۷۴۴	$-2+\sqrt{13}$

در مورد جدول فوق، توضیح چند نکته ضروری است:

- چون در ابتدای مرحله اول هستیم تمام منبع را در اختیار داریم. یعنی $a_1=3$
- چرا برای x_1 دو بازه متفاوت به جهت تصمیم‌گیری تعریف کردیم؟ زیرا به ازای $0\le x_1\le 1$ به $2\le a_2\le 0$ در مرحله بعدی و به ازای $1\le x_1\le 3$ به $2\le a_2\le 3$ در مرحله بعدی خواهیم رفت.
- چطور $f_1^*(s_1)=\max\{f_1(s_1,x_1)\}$ محاسبه شد؟

باید $\max\{(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16),(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(3-x_1)-(3-x_1)^3)\}$ محاسبه شود. بنابراین باید $\max\{(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16)\}$ در بازه $0\le x_1\le 1$ و همچنین $\max\{(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(a_1-x_1)-(a_1-x_1)^3)\}$ در بازه $1\le x_1\le 3$ به طور جداگانه محاسبه شود و هرکدام مقدار بیشتری داشته باشد به عنوان $f_1^*(s_1)=\max\{f_1(s_1,x_1)\}$ و جواب بهینه خواهد بود.

برای $0\le x_1\le 1$ داریم:

$$(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16)'=12+6x_1-6x_1^2=0\to x_1^2-x_1-2=0\to\begin{cases}x_1=-1\\x_1=2\end{cases}$$

که به ازای $x_1=2, x_1=-1$ غیرقابل قبول است(زیرا $0\le x_1\le 1$) اکنون باید به ازای نقاط ابتدای و انتهایی مقدار تابع هدف را محاسبه و با یکدیگر مقایسه کرد:

$$\begin{cases} x_1=0 \to (12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16)=16 \\ x_1=1 \to (12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16)=29 \end{cases}$$

برای $1\le x_1\le 3$ داریم:

$$(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(3-x_1)-(3-x_1)^3)'=12+6x_1-6x_1^2-12+3(3-x_1)^2=0$$

$$=-3x_1^2-12x_1+27=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2+\sqrt{13} \\ x_1=-2-\sqrt{13} \end{cases}$$

چون $x_1=-2-\sqrt{13}$ غیرقابل قبول است باید به ازای نقاط ابتدایی و انتهایی که به ترتیب برابر $x_1=1, x_1=3$ هستند و همچنین $x_1=-2+\sqrt{13}$ که در آن شیب تابع برابر صفر می‌شود، مقدار تابع هدف را بدست آورد و با یکدیگر مقایسه کرد:

$$\begin{cases} x_1=1 \to (12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(3-x_1)-(3-x_1)^3)=29 \\ x_1=3 \to (12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(3-x_1)-(3-x_1)^3)=9 \\ x_1=-2+\sqrt{13} \to (12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(3-x_1)-(3-x_1)^3)=32.741 \end{cases}$$

بنابراین $\max\{(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+16),(12x_1+3x_1^2-2x_1^3+12(3-x_1)-(3-x_1)^3)\}$ برابر 32.744 و به ازای $x_1=-2+\sqrt{13}$ رخ می‌دهد. چون $x_1=-2+\sqrt{13}$ شده است میزان منبع باقی مانده برای مرحله دوم یعنی a_2 برابر است با $a_2=3-(x_1=-2+\sqrt{13})=5-\sqrt{13}$ بنابراین مقدار $x_2=5-\sqrt{13}$

مثال ۲۲. شرایط خواسته شده در مساله قبل را با توجه به حرکت رو به جلو بیان کرده و حل کنید و مقادیر تابع هدف حاصل از حل این مساله را با استفاده از در روش بیان شده، مقایسه کنید.

پاسخ: چون حرکت رو به جلو می‌باشد:

توجه کنید که در این حالت، متغیر وضعیت برابر است با مقدار منبع تخصیص یافته در انتهای مرحله iام.

مرحله اول: متغیر x_1:

$$x_1+x_2\le 3 \to x_1\le \underbrace{3-x_2}_{a_1}\ ,\ a_1=3-x_2$$

$$f_1(a_1,x_1)=12x_1+3x_1^2-2x_1^3 \to (12x_1+3x_1^2-2x_1^3)'=0$$

$$\to \begin{cases} x_1=-1\ (\times\times\times) \\ x_1=2 \end{cases}$$

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1,x_1)=12x_1+3x_1^2-2x_1^3$		$f_1^*(s_1)=\max\{f_1(s_1,x_1)\}$	x_1^*
	$0\le x_1\le a_1$	$2\le x_1\le 3$		
$0\le a_1\le 2$	$12a_1+3a_1^2-2a_1^3$	$-$	$12a_1+3a_1^2-2a_1^3$	a_1
$2\le a_1\le 3$	$-$	$12x_1+3x_1^2-2x_1^3$	20	2

برای مرحله دوم: x_2

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2,x_2)=12x_2-x_2^3$		$f_2^*(s_2)=\max\{f_2(s_2,x_2)\}$	x_2^*
	$0\le x_2\le 1$	$1\le x_2\le 3$		
$a_2=3$	$12x_2-x_2^3+20$	$12x_2-x_2^3$ $+12a_1+3a_1^2-2a_1^3=$ $12x_2-x_2^3$ $+$ $12(3-x_2)+3(3-x_2)^2-2(3-x_2)^3$	$32/744$	$5-\sqrt{13}$

سیاست بهینه:

$$x_2^*=5-\sqrt{13}\ ,\ x_1^*=-2+\sqrt{13}\ ,\ z^*=32/744$$

همانطور که مشخص است جواب بهینه حاصل از دو روش پیشرو و پسرو تفاوتی با هم ندارند.

✍ **تمرین**. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z=5x_1^2+2x_1+3x_2^2$$
$$x_1+3x_2\le 8$$
$$2x_1+5x_2\le 14$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

جواب: مشابه مثال صفحه ۵۳۳ می‌باشد. سیاست بهینه برابر است با:

$$x_1^*=7,\ x_2^*=0,\ z^*=259$$

تمرین. مساله برنامه‌ریزی غیر خطی را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = 7x_1^2 + 6x_1 + 5x_2^2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 - 3x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

جواب: سیاست بهینه: $x_1^* = 9/6,\ x_2^* = 0/2,\ z^* = 702/92$

تمرین. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا و روش پسرو حل کنید.

$$\max z = 13x_1 - x_1^2 + 30/2x_2 - 5x_2^2 + 10x_3 - 2/5x_3^2$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

جواب: سیاست بهینه: $x_1^* = 2/3,\ x_2^* = 1/345\ ,x_3^* = 0\ ,\ z^* = 56/18$

تمرین. مساله قبل را با استفاده از روش حرکت به جلو(پیشرو) حل کنید و مرحله، متغیر تصمیم، حالت، شرط کمکی و معادلات تکراری در هر مرحله را مشخص کنید.

مثال۲۳. معادله بازگشتی پویا به روش پسرو را برای مساله زیر فرمولبندی کنید.

$$\min y_0 = (\max(f(y_1), f(y_2), f(y_3), \ldots, f(y_n))$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = c \qquad i = 1, \ldots, n\ ,\ \ y_i \ge 0$$

پاسخ: عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این مثال:

- ✓ n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.)
- ✓ متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده در ابتدای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

مرحله nام:

y_n / s_n	$0 \le y_n \le a_n$	$g_n^*(s_n) = \max\{f_n(a_n, x_n)\}$	y_n^*
	$g_n(a_n) = \min(\max\{f_n(a_n, x_n)\})$		
$0 \le a_n \le c$	$f(y_n)$	$f(y_n = a_n)$	a_n

مرحله $n-1$ام:

y_{n-1} / s_{n-1}	$0 \le y_{n-1} \le a_{n-1}$	$g_{n-1}^*(s_{n-1}) = \max\{f_{n-1}(a_{n-1}, y_{n-1})\}$	y_{n-1}^*
	$g_{n-1}(a_{n-1}) = \min(\max\{f_n(a_n, x_n), g_n^*(a_n\})$		
$0 \le a_{n-1} \le c$	$\min(\max\{f_n(a_n, x_n), g_n^*(a_n = a_{n-1} - y_{n-1})\})$		

بنابراین در حالت کلی معادله تکراری و محدودیت‌های مربوط به معادلات تکراری به صورت زیر است:

$$g_i(x_i) = \min(\max\{f_i(y_i)\ ,\ g^*_{i+1}(a_i - y_i)\})$$
$$y_i + y_{i+1} + \ldots + y_n = a_i$$
$$y_j \ge 0\ ,\ i \le j \le n$$

مثال ۲۴. مساله قبل را با روش پیشرو فرمول‌بندی کنید.

پاسخ:

- ✓ n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند).
- ✓ متغیر وضعیت: میزان تخصیص(مصرف) از منبع تا انتهای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

بنابراین در حالت کلی معادله تکراری و محدودیت‌های مربوط به معادلات تکراری بدین صورت است:

$$g_i(x_i) = \min(\max\{f_i(y_i),\ g^*_{i-1}(a_i - y_i)\})$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_i = a_i$$
$$y_j \geq 0\ ,\ 1 \leq j \leq i$$

مثال۲۵. در مساله پیشین، با فرض های زیر، مساله را حل کنید.

$$f(y_1) = y_1 - 2,\ f(y_2) = 5y_2 + 3,\ f(y_3) = y_3 + 5,\ c = 10,\ n = 3$$

پاسخ: عناصر برنامه‌ریزی پویا برای این مثال:

- ✓ این مساله به دلخواه به روش پسرو حل می‌گردد.
- ✓ ۳ مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.)
- ✓ متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده برای استفاده در مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

مرحله سوم: مربوط به متغیر y_3

$s_3 \backslash y_3$	$0 \leq y_3 \leq a_n$	$g_3^*(s_3) = \max\{g_3(a_3) = y_3 + 5\}$	y_3^*
$0 \leq a_3 \leq 10$	$g_3(a_3) = y_3 + 5$	$a_3 + 5$	a_3

مرحله دوم: مربوط به متغیر y_2

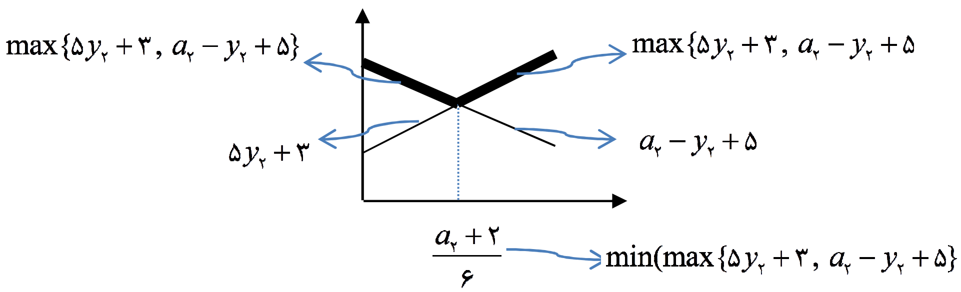
همانطور که در دو مثال قبل مشاهده شد، داریم: $y_i + \underbrace{y_{i+1} + \ldots + y_n}_{a_{i+1}} = a_i$ بنابراین در این مرحله

داریم:

$$y_{n-1} + a_n = a_{n-1} \Rightarrow y_2 + a_3 = a_2 \Rightarrow a_3 = a_2 - y_2$$

$s_2 \backslash y_2$	$0 \leq y_2 \leq a_2$	$g_2^*(s_2)$	y_2^*
$0 \leq a_2 \leq 10$	$g_2(a_2) = \min(\max\{f(y_2) = 5y_2 + 3,\ g_3^*(a_3)\}) =$ $\min(\max\{5y_2 + 3,\ a_3 + 5\}) =$ $\min(\max\{5y_2 + 3,\ a_2 - y_2 + 5\})$	$\frac{5}{6}a_2 + \frac{28}{6}$	$\frac{a_2 + 2}{6}$

توجه کنید که برای محاسبه $\min(\max\{5y_2 + 3,\ a_2 - y_2 + 5\})$ باید به صورت زیر عمل کنیم:
دو خط $5y_2 + 3,\ a_2 - y_2 + 5$ را رسم می‌کنیم. در هر قسمت ماکزیمم دو خط را لحاظ می‌کنیم و در نهایت می نیمم ماکزیمم آن‌ها را حساب می‌کنیم (دقیقاً همانند مثال صفحه ۵۲۳).



مرحله اول: مربوط به متغیر $y_۱$: در این مرحله داریم:

$$y_{n-۱}+a_n=a_{n-۱}\Rightarrow y_۱+a_۲=a_۱\Rightarrow a_۲=a_۱-y_۱\Rightarrow a_۲=۱۰-y_۱$$

$s_۱ \backslash y_۱$	$۰\le y_۱\le ۱۰$	$g_۱^*(s_۱)$	$y_۱^*$
$a_۲=۱۰$	$g_۱(a_۱)=\min(\max\{f(y_۱)=y_۱-۲,\ g_۲^*(a_۲)\})=$ $\min(\max\{y_۱-۲,\ \frac{۵}{۶}a_۲+\frac{۲۸}{۶}\})=$ $\min(\max\{y_۱-۲,\ \frac{۵}{۶}(۱۰-y_۱)+\frac{۲۸}{۶}\})$	$\frac{۶۸}{۱۱}$	$\frac{۹۰}{۱۱}$

همانند مرحله قبل باز هم باید $\min(\max\{y_۱-۲,\frac{۵}{۶}(۱۰-y_۱)+\frac{۲۸}{۶}\})$ محاسبه گردد. در این صورت داریم:

$$y_۱-۲=\frac{۵}{۶}(۱۰-y_۱)+\frac{۲۸}{۶}\Rightarrow y_۱=\frac{۹۰}{۱۱}$$

و با قرار دادن $y_۱=\frac{۹۰}{۱۱}$ در هر یک از دو تابع $\frac{۵}{۶}(۱۰-y_۱)+\frac{۲۸}{۶}$ یا $y_۱-۲$ می‌توان ارزش بهینه را بدست آورد. اگر به شکل مرحله قبل نگاه کنید، $\min(\max\{y_۱-۲,\ \frac{۵}{۶}(۱۰-y_۱)+\frac{۲۸}{۶}\})$ محل برخورد دو خط می‌باشد.

بنابراین سیاست بهینه برابر است با:

$$y_1^* = \frac{90}{11}$$

$$\Rightarrow a_2 = 10 - y_1 = \frac{20}{11} \rightarrow \ y_2^* = \frac{a_2 + 2}{6} = \frac{7}{11}$$

$$\Rightarrow a_3 = a_2 - y_2 = \frac{20}{11} - \frac{7}{11} = \frac{13}{11} \rightarrow y_3^* = \frac{13}{11}$$

$$\Rightarrow z^* = \frac{68}{11}$$

مثال ۲۶. مساله زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا و به روش پیشرو حل کنید.

$$\min y_0 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2$$

$$\prod_{i=1}^{10} y_i = 8$$

$$y_i \geq 0 \ , \ \ j = 1,2,\ldots,10$$

پاسخ: عناصر برنامه‌ریزی پویا:

- ✓ ۱۰ مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.)
- ✓ متغیر وضعیت: مقدار مصرف از منبع تا انتهای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

مرحله اول: متغیر y_1:

s_1 \ y_1	$y_1 = a_1$ $g_1(a_1) = \min(f_1(a_1, y_1)) = \min y_1^2$	$g_1^*(s_1) = \min\{f_1(a_1, y_1)\}$	y_1^*
$0 < a_1 \leq 8$	y_1^2	a_1^2	a_1

- متغیر وضعیت: متغیر وضعیت نمی‌تواند مقدار صفر داشته باشد زیرا در این حالت $y_1 = 0$ است و در نتیجه $\prod_{i=1}^{10} y_i = 0 \neq 8$
- متغیر تصمیم y_1 نمی‌تواند عددی غیر از a_1 بگیرد (به توضیحات جملات فوق توجه کنید.)

پیش از اینکه وارد مرحله دوم شویم، توجه به نکته زیر ضروری است:

با توجه به تعریف متغیر وضعیت، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_1 \\ y_1 \times y_2 = a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \times y_2 = a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{y_2}$$

توجه کنید که $y_1 \times y_2 = a_2$ بدین معناست که تا پایان مرحله دوم، باید a_2 از منبع تخصیص داده شود. همچنین برای مراحل بعدی داریم:

$$\underbrace{y_1 \times y_2}_{a_2} \times y_3 = a_3 \Rightarrow a_2 \times y_3 = a_3 \Rightarrow a_2 = \frac{a_3}{y_3}$$

بنابراین در حالت کلی داریم: $\underbrace{y_1 \times y_2 \times \ldots \times y_{i-1}}_{a_{i-1}} \times y_i = a_i \Rightarrow a_{i-1} \times y_i = a_i \Rightarrow a_{i-1} = \frac{a_i}{y_i}$

مرحله دوم: متغیر y_2:

y_2 / s_2	$g_2(a_2) = (f_2(a_2, y_2) + g_1^*(a_1))$	$g_2^*(a_2) = \min(g_2(a_2))$	y_2^*
$0 < a_2 < 8$	$y_2^2 + g_1^*(a_1) = y_2^2 + a_1^2 = y_2^2 + (\frac{a_2}{y_2})^2$	$\min\ \{y_2^2 + (\frac{a_2}{y_2})^2\} = 2(a_2) = 2(a_2^2)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a_2}$

$$(y_2^2 + (\frac{a_2}{y_2})^2)' = 2y_2 - 2(\frac{a_2}{y_2^2})(\frac{a_2}{y_2}) = 0$$

$$= y_2^4 - a_2^2 = 0 \Rightarrow y_2 = \sqrt{a_2} = a_2^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین با قراردادن $y_2 = \sqrt{a_2} = a_2^{\frac{1}{2}}$ در عبارت $\{y_2^2 + (\frac{a_2}{y_2})^2\}$ ارزش بهینه در این مرحله بدست می‌آید.

مرحله سوم: متغیر y_3 :

s_3 \ y_3	y_3 $g_3(a_3) = (f_3(a_3, y_3) + g_2^*(a_2))$	$g_3^*(a_3) = \min(g_3(a_3))$	y_3^*
$0 < a_3 < 8$	$y_3^2 + g_2^*(a_2) = y_3^2 + 2a_2 = y_3^2 + 2(\frac{a_3}{y_3})$	$\min\{y_3^2 + 2(\frac{a_3}{y_3})\} = 3\sqrt[3]{a_3^2}$	$y_3 = \sqrt[3]{a_3}$

$$(y_3^2 + 2(\frac{a_3}{y_3}))' = 2y_3 - 2\frac{a_3}{y_3^2} = 0$$

$$\Rightarrow y_3 = \sqrt[3]{a_3} \Rightarrow y_3 = a_3^{\frac{1}{3}}$$

بنابراین با قرار دادن $y_3 = a_3^{\frac{1}{3}}$ در $\{y_3^2 + 2(\frac{a_3}{y_3})\}$ ارزش بهینه در این مرحله بدست می‌آید.

اگر به سه مرحله قبل توجه کرده باشید، در مرحله اول، $y_1^* = a_1$ و ارزش $g_1(a_1) = a_1^2$ است.

در مرحله دوم، $y_2^* = a_2^{\frac{1}{2}}$ و ارزش $g_2(a_2) = 2(a_2^2)^{\frac{1}{2}}$ است.

در مرحله سوم، $y_3^* = a_3^{\frac{1}{3}}$ و ارزش $g_3(a_3) = 3(a_3^2)^{\frac{1}{3}}$ است. بنابراین با استقراء می‌توان نشان داد:

در مرحله i ام داریم: $y_i^* = a_i^{\frac{1}{i}}$, $g_i(a_i) = i(a_i^2)^{\frac{1}{i}}$ بنابراین خواهیم داشت:

در مرحله چهارم: $y_4^* = a_4^{\frac{1}{4}}$, $g_4(a_4) = 4(a_4^2)^{\frac{1}{4}}$

در مرحله پنجم: $y_5^* = a_5^{\frac{1}{5}}$, $g_5(a_5) = 5(a_5^2)^{\frac{1}{5}}$

در مرحله ششم: $y_6^* = a_6^{\frac{1}{6}}$, $g_6(a_6) = 6(a_6^2)^{\frac{1}{6}}$

در مرحله هفتم: $y_7^* = a_7^{\frac{1}{7}}$, $g_7(a_7) = 7(a_7^2)^{\frac{1}{7}}$

در مرحله هشتم: $y_8^* = a_8^{\frac{1}{8}}$, $g_8(a_8) = 8(a_8^2)^{\frac{1}{8}}$

در مرحله نهم: $y_9^* = a_9^{\frac{1}{9}}$, $g_9(a_9) = 9(a_9^2)^{\frac{1}{9}}$

در مرحله دهم: $y_{10}^* = a_{10}^{\frac{1}{10}} \;,\; g_{10}(a_{10}) = 10\,(a_{10}^{2})^{\frac{1}{10}}$

در مرحله دهم با توجه به اینکه در آخرین مرحله هستیم طبق تعریف متغیر وضعیت مقدار مصرف از منبع تا انتهای مرحله i ام: a_i است. بنابراین باید در انتهای مرحله دهم داشته باشیم: $a_{10} = 8$ بنابراین داریم:

در مرحله دهم: $y_{10}^* = a_{10}^{\frac{1}{10}} = 8^{\frac{1}{10}} \;,\; g_{10}(a_{10} = 8) = 10\,(8^{2})^{\frac{1}{10}}$

به همین صورت برای سایر متغیرها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y_9^* = a_9^{\frac{1}{9}} \\ a_9 = \dfrac{a_{10}}{y_{10}} \end{array}\right\} \Rightarrow y_9^* = \left(\frac{8}{8^{\frac{1}{10}}}\right)^{\frac{1}{9}} = \left(8^{\frac{9}{10}}\right)^{\frac{1}{9}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_8^* = a_8^{\frac{1}{8}} \\ a_8 = \dfrac{a_9}{y_9} = \dfrac{\frac{a_{10}}{y_{10}}}{y_9} \end{array}\right\} \Rightarrow y_8^* = \left(\frac{\frac{8}{8^{\frac{1}{10}}}}{8^{\frac{1}{10}}}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(8^{\frac{8}{10}}\right)^{\frac{1}{8}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_7^* = a_7^{\frac{1}{7}} \\ a_7 = \dfrac{a_8}{y_8} \end{array}\right\} \Rightarrow y_7^* = \left(8^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{1}{7}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_6^* = a_6^{\frac{1}{6}} \\ a_6 = \dfrac{a_7}{y_7} \end{array}\right\} \Rightarrow y_6^* = \left(8^{\frac{6}{10}}\right)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_5^* = a_5^{\frac{1}{5}} \\ a_5 = \dfrac{a_6}{y_6} \end{array}\right\} \Rightarrow y_5^* = \left(8^{\frac{5}{10}}\right)^{\frac{1}{5}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_4^* = a_4^{\frac{1}{4}} \\ a_4 = \dfrac{a_5}{y_5} \end{array}\right\} \Rightarrow y_4^* = \left(8^{\frac{4}{10}}\right)^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_3^* &= a_3^{\frac{1}{3}} \\ a_3 &= \frac{a_4}{y_4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_3^* = (8^{\frac{3}{10}})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_2^* &= a_2^{\frac{1}{2}} \\ a_2 &= \frac{a_3}{y_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2^* = (8^{\frac{2}{10}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1^* &= a_1^{\frac{1}{1}} \\ a_1 &= \frac{a_2}{y_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1^* = (8^{\frac{1}{10}})^{\frac{1}{1}} = 8^{\frac{1}{10}}$$

با توجه به اینکه $\min y_0 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2$ می‌باشد، مقدار تابع هدف بهینه مساله برابر $z^* = 10 \times (64)^{\frac{1}{10}}$ می‌باشد.

مثال۲۷. معادله تکراری و محدودیت‌های مربوط به معادلات تکراری مساله فوق را در حالت کلی بیان کنید.(روش حل پیشرو).

پاسخ:

- ✓ n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.).
- ✓ متغیر وضعیت: مقدار مصرف از منبع تا انتهای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم

$$g_i(x_i) = (y_i^2 + g_{i-1}^*(a_{i-1} = \frac{a_i}{y_i}))$$

$$y_1 \times y_2 \times .. \times y_i = a_i$$

$$y_j > 0, \ 1 \le j \le i$$

مثال۲۸. معادله تکراری و محدودیت‌های مربوط به معادلات تکراری مساله فوق را در حالت کلی بیان کنید.(روش حل پسرو):

پاسخ:

- ✓ n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.).
- ✓ متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده در ابتدای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

$$g_i(x_i) = (y_i^۲ + g_{i+۱}^*(a_{i+۱} = \frac{a_i}{y_i}))$$
$$y_i \times y_{i+۱} \times \ldots \times y_n = a_i$$
$$y_j > ۰ \,,\; i \le j \le n$$

✍ **تمرین**. مساله قبل از روش پسرو به طور کامل حل کنید.

راهنمایی: توجه داشته باشید که داریم: $a_۹ = \frac{a_{۱۰}}{y_{۱۰}} \,,\; a_۸ = \frac{a_۹}{y_۹}, \ldots, a_{i-۱} = \frac{a_i}{y_i}$

مثال ۲۹. مساله ریاضی یک کمیت q به طوری که $q > ۰$ است را در نظر می‌گیریم. همچنین قصد داریم این کمیت ریاضی را به n قسمت طوری تقسیم کنیم که حاصلضرب n قسمت را بیشینه کند. همانگونه که از مدل آن که در زیر آمده است مشخص است، فرمول‌بندی آن همانند مساله قابلیت اطمینان است. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا آن را حل کنید.

$$\max z = \prod_{i=۱}^{n} y_i$$
$$\sum_{i=۱}^{n} y_i = q$$
$$y_i \ge ۰,\; i = ۱,۲,\ldots,n$$

پاسخ:

نحوه تعریف برای این سوال، همانند چند سوال پیشین است. البته به این علت که این سوال را با توجه به روش پیشرو حل می‌کنیم عناصر برنامه‌ریزی پویا به صورت زیر تعریف می‌شوند(به جهت مقایسه روش پیشرو و پسرو برای حل این سوال به مثال‌های بعدی توجه کنید): عناصر برنامه‌ریزی پویا:

- ✓ n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.).
- ✓ متغیر وضعیت: مقدار مصرف از منبع تا انتهای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.

✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله i ام می‌نامیم.

مرحله اول: متغیر y_1 :

y_1 \ s_1	$y_1 = a_1$ $g_1(a_1) = \max(f_1(a_1, y_1)) = \max y_1$	$g_1^*(s_1) = \max\{f_1(a_1, y_1)\}$	y_1^*
$0 < a_1 < q$	y_1	a_1	a_1

پیش از اینکه وارد مرحله دوم شویم، توجه به نکته زیر ضروری است:

با توجه به تعریف متغیر وضعیت، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_1 \\ y_1 + y_2 = a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + y_2 = a_2 \Rightarrow a_1 = a_2 - y_2$$

توجه کنید که $y_1 + y_2 = a_2$ بدین معناست که تا پایان مرحله دوم، باید a_2 از منبع تخصیص داده شود. همچنین برای مراحل بعدی داریم:

$$\underbrace{y_1 + y_2}_{a_2} + y_3 = a_3 \Rightarrow a_2 + y_3 = a_3 \Rightarrow a_2 = a_3 - y_3$$

بنابراین در حالت کلی داریم:

$$\underbrace{y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1}}_{a_{i-1}} + y_i = a_i \Rightarrow a_{i-1} + y_i = a_i \Rightarrow a_{i-1} = a_i - y_i$$

مرحله دوم: متغیر y_2 :

y_2 \ s_2	y_2 $g_2(a_2) = (f_2(a_2, y_2) \times g_1^*(a_1))$	$g_2^*(a_2) = \max(g_2(a_2))$	y_2^*
$0 < a_2 < q$	$y_2 \times g_1^*(a_1) = y_2 \times a_1 = y_2 \times (a_1 = a_2 - y_2)$ $y_2 \times (a_2 - y_2)$	$\max\ \{y_2 \times (a_2 - y_2)\} = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2$	$\frac{a_2}{2}$

$$\max\ \{y_2\times(a_2-y_2)\}=(y_2\times(a_2-y_2))'=(a_2y_2-y_2^2)'$$

$$=a_2-2y_2=0\Rightarrow y_2=\frac{a_2}{2}$$

با قرار دادن $y_2=\frac{a_2}{2}$ در $y_2\times(a_2-y_2)$ خواهیم داشت: $\max\ \{y_2\times(a_2-y_2)\}=\left(\frac{a_2}{2}\right)^2$

مرحله سوم: متغیر y_3 :

y_3 / s_3	y_3 $g_3(a_3)=(f_3(a_3,y_3)\times g_2^*(a_2))$	$g_3^*(a_3)=\max(g_3(a_3))$	y_3^*
$0<a_3<q$	$y_3\times g_2^*(a_2)=$ $y_3\times\left(\frac{a_2}{2}\right)^2=y_3\times\left(\frac{a_2=a_3-y_3}{2}\right)^2$	$\max\ \{y_3\times\left(\frac{a_3-y_3}{2}\right)^2\}=$ $\{(y_3=\frac{a_3}{3})\times\left(\frac{a_3-y_3}{2}\right)\}$ $=\frac{a_3^3}{3^3}=(\frac{a_3}{3})^3$	$\frac{a_3}{3}$

$$\max\ \{y_3\times\left(\frac{a_3-y_3}{2}\right)^2\}=\left(y_3\times\left(\frac{a_3-y_3}{2}\right)^2\right)'=0$$

$$\Rightarrow y_3=\frac{a_3}{3}$$

بنابراین با قرار دادن $y_3=\frac{a_3}{3}$ در $\{y_3\times\left(\frac{a_3-y_3}{2}\right)^2\}$ مقدار ارزش بهینه در این مرحله بدست می‌آید.

اگر به سه مرحله قبل توجه کرده باشید، در مرحله اول، $y_1^*=a_1$ و ارزش $g_1(a_1)=a_1$ است.

در مرحله دوم، $y_2^*=\frac{a_2}{2}$ و ارزش $g_2(a_2)=\left(\frac{a_2}{2}\right)^2$ است.

در مرحله سوم، $y_۳^* = \frac{a_۳}{۳}$ و ارزش $g_۳(a_۳) = (\frac{a_۳}{۳})^۳$ است. بنابراین با استقراء می‌توان نشان داد:

در مرحله iام داریم: $y_i^* = \frac{a_i}{i},\ g_i(a_i) = (\frac{a_i}{i})^i$ بنابراین خواهیم داشت:

در مرحله چهارم داریم: $y_۴^* = \frac{a_۴}{۴},\ g_۴(a_۴) = (\frac{a_۴}{۴})^۴$

مرحله پنجم: $y_۵^* = \frac{a_۵}{۵},\ g_۵(a_۵) = (\frac{a_۵}{۵})^۵$

و در مرحله nام: $y_n^* = \frac{a_n}{n},\ g_n(a_n) = (\frac{a_n}{n})^n$ و چون در انتهای مرحله nام، باید میزان مصرف شده از منبع برابر q باشد داریم: $a_n = q$ بنابراین در مرحله پایانی داریم: $y_n^* = \frac{q}{n},\ g_n(a_n) = (\frac{q}{n})^n$

به همین ترتیب به عقب باز می‌گردیم و برای سایر y_i^* داریم:

$$\left.\begin{aligned} y_{n-۱}^* &= \frac{a_{n-۱}}{n-۱}, \\ a_{n-۱} &= a_n - y_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{n-۱}^* = \left(\frac{q-(\frac{q}{n})}{n-۱}\right) = \left(\frac{q}{n}\right)$$

برای سایر متغیرها هم به همین صورت بدست می‌آید. بنابراین داریم:

$$y_۱^* = y_۲^* = y_۳^* = \ldots = y_n^* = \frac{q}{n}, \quad g^*{}_n(a_n) = z^* = (\frac{q}{n})^n$$

مثال ۳۰. معادله تکراری و محدودیت‌های مربوط به معادلات تکراری مساله فوق را در حالت کلی بیان کنید.(روش حل پیشرو).

پاسخ:

- ✓ n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.)
- ✓ متغیر وضعیت: مقدار مصرف از منبع تا انتهای مرحله iام: a_i
- ✓ متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- ✓ $g_i^*(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

$$g_i(x_i) = (y_i \times g_{i-۱}^*(a_{i-۱} = a_i - y_i))$$
$$y_۱ + y_۲ + \ldots + y_i = a_i$$
$$y_j \geq ۰\ ,\ ۱ \leq j \leq i$$

تمرین. تولیدکننده‌ای متعهد شده است که در انتهای ماه اول ۸۰ و در انتهای ماه دوم ۱۲۰ واحد کالای مشخصی را به فروشنده تحویل دهد. او می‌تواند در صورت لزوم در ماه اول بیش از ۸۰ واحد کالا را تولید کند و برای تحویل در ماه بعد انبار نماید. هزینه انبارداری هر واحد کالا ۸ واحد پول است. هزینه تولید x واحد از این کالا در ماه برابر با $۰/۵x+۰/۲x^{۲}$ است. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، برنامه تولید هر ماه را تعیین کنید.

راهنمایی: مرحله را هر ماه و متغیر وضعیت را موجودی کالا در ابتدای هر ماه درنظر بگیرید.
جواب: سیاست بهینه برابر است با: $x_{۱}^{*}=۹۰,\ x_{۲}^{*}=۱۱۰\ ,\ z^{*}=۴۲۲۰$

مثال ۳۱. معادله تکراری و محدودیت‌های مربوط به معادلات تکراری مساله فوق را در حالت کلی بیان کنید.(روش حل پسرو).

پاسخ:

- n مرحله داریم (هر کدام از متغیرها بیانگر یک مرحله هستند.).
- متغیر وضعیت: میزان منبع باقیمانده در ابتدای مرحله iام: a_i
- متغیر تصمیم: مقداری که y_i برای مرحله i می‌تواند بگیرد.
- $g_i^{*}(s_i)$ را مقدار بهینه تابع هدف در مرحله iام می‌نامیم.

$$g_i(x_i)=(y_i\times g_{i+1}^{*}(a_{i+1}=a_i-y_i))$$
$$y_i+y_{i+1}+\ldots+y_n=a_i$$
$$y_j\ge 0\ ,\ \ i\le j\le n$$

تمرین. مساله قبل از روش پسرو به طور کامل حل کنید.

راهنمایی: توجه داشته باشید که: $y_n=a_n$ و $a_n=a_{n-1}-y_{n-1}$

مثال ۳۲. مساله فروشنده دوره گرد (TSP) زیر را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	۴	۵
۱	-	۵	۸	۳	۲
۲	۱	-	۴	۳	۵
۳	۲	۶	-	۱	۴
۴	۷	۵	۳	-	۲
۵	۱	۶	۲	۴	-

توجه کنید که در حالت کلی، مساله TSP می‌تواند نسبت به قطر اصلی نامتقارن باشد.

پاسخ:

$i_\circ$ اولین شهر در تور که بطور دلخواه انتخاب می‌شود.

J زیر مجموعه ای از n شهر.

$f(i,j)$ طول کوتاهترین مسیر از شهر $i_\circ$ که از شهرهای مجموعه j می گذرد و به شهر $i_\circ$ برمی‌گردد.

$f(i,j)$ در حالت عمومی به صورت زیر است.

$$f(i,j)=\min(d_{ij}+f(j,\{J-j\}))$$

تور بهینه به صورت زیر می‌باشد.

$$f(i,k)=\min(d_{i_\circ j}+f(j,\{k-j\}))$$

برای این مثال داریم:

$i_\circ=۱$: شهر مبدأ را شهر اول انتخاب می‌کنیم.

مرحله ۱:

$$f(i,\varnothing)=d_{ji_\circ}$$

$$f(i=۲,\varnothing)=۱$$

توضیح: اگر شهر پایانی شهر ۲ باشد، فاصله تا گره ۱ بدون آنکه گره ای را در بین مسیر طی کند برابر با ۱ است.

$$d_{۲۱}=۱$$

$$f(i=۳,\varnothing)=۲\quad,\ f(i=۴,\varnothing)=۷\ ,\ f(i=۵,\varnothing)=۱$$

مرحله ۲:

$$f(۲,\{۳\})=d_{۲۳}+f(۳,\varnothing)=۶$$

توضیح: اگر از شهر ۲ به ۳ و سپس از شهر ۳ به شهر ۱ بازگردیم فاصله برابر با ۶ است.

$$f(۲,\{۴\}) = d_{۲۴} + f(۴,\varnothing) = ۱۰$$

$$f(۲,\{۵\}) = d_{۲۵} + f(۵,\varnothing) = ۶$$

و به همین ترتیب اگر از شهر ۳ به شهری دیگر و سپس به شهر یک برویم، داریم:

$$f(۳,\{۲\}) = d_{۳۲} + f(۲,\varnothing) = ۷$$

$$f(۳,\{۴\}) = d_{۳۴} + f(۴,\varnothing) = ۸$$

$$f(۳,\{۵\}) = d_{۳۵} + f(۵,\varnothing) = ۵$$

و به همین ترتیب اگر از شهر ۴ به شهری دیگر و سپس به شهر یک برویم، داریم:

$$f(۴,\{۲\}) = d_{۴۲} + f(۲,\varnothing) = ۶$$

$$f(۴,\{۳\}) = d_{۴۳} + f(۳,\varnothing) = ۵$$

$$f(۴,\{۵\}) = d_{۴۵} + f(۵,\varnothing) = ۳$$

و به همین ترتیب اگر از شهر ۵ به شهری دیگر و سپس به شهر یک برویم، داریم:

$$f(۵,\{۲\}) = d_{۵۲} + f(۲,\varnothing) = ۶+۱ = ۷$$

$$f(۵,\{۳\}) = d_{۵۳} + f(۳,\varnothing) = ۲+۲ = ۴$$

$$f(۵,\{۴\}) = d_{۵۴} + f(۴,\varnothing) = ۴+۷ = ۱۱$$

مرحله سوم:

$$f(۲,\{۳,۴\}) = \min(d_{۲۳} + f(۳,\{۴\}), d_{۲۴} + f(۴,\{۳\})) = ۸$$

توضیح: اگر قرار باشد از شهر ۲ پیش از آنکه به مبدأ (شهر یک)بازگردیم به یکی از دو شهر ۳و ۴ برویم دو حالت پیش می آید. یا اینکه اول به شهر ۳ و سپس به ۴ و نهایتاً به یک برویم و یا اینکه اول به شهر ۴ و سپس به ۳ و نهایتاً به شهر یک برویم و از بین این دو حالت باید مینیمم انتخاب گردند.

برای سایر حالت ها داریم:

$$f(۲,\{۳,۵\}) = \min(d_{۲۳} + f(۳,\{۵\}), d_{۲۵} + f(۵,\{۳\})) = ۹$$

$$f(۲,\{۴,۵\}) = \min(d_{۲۴} + f(۴,\{۵\}), d_{۲۵} + f(۵,\{۴\})) = ۶$$

$$f(۳,\{۲,۴\}) = \min(d_{۳۲} + f(۲,\{۴\}), d_{۳۴} + f(۴,\{۲\})) = ۷$$

$$f(۳,\{۲,۵\}) = \min(d_{۳۲} + f(۲,\{۵\}), d_{۳۵} + f(۵,\{۲\})) = ۱۱$$

$$f(۳,\{۴,۵\}) = \min(d_{۳۴} + f(۴,\{۵\}), d_{۳۵} + f(۵,\{۲\})) = ۴$$

برای دو شهر ۴ و ۵ هم بطور خلاصه نتایج به صورت زیر است:

$$f(۴,\{۲,۳\})=۱۰ \quad , \quad f(۴,\{۲,۵\})=۹ \quad , \quad f(۴,\{۳,۵\})=۶ \quad ,$$
$$f(۵,\{۲,۳\})=۹ \quad , \quad f(۵,\{۲,۴\})=۱۰ \quad , \quad f(۵,\{۳,۴\})=۹$$

مرحله چهارم:

$$f(۲,\{۳,۴,۵\})=\min(d_{۲۳}+f(۳,\{۴,۵\}),d_{۲۴}+f(۳,\{۴,۵\}),d_{۲۵}+f(۵,\{۳,۴\})=۸$$

توضیح: یعنی شهر دوم که قرار است از آن عبور کنیم شهر شماره ۲ باشد و پس از طی کردن سه شهر ۳و ۴و ۵ به مبدأ بازگردد. همین محاسبات برای شهرهای دیگر به عنوان شهر دوم به صورت زیر است.

$$f(۳,\{۲,۴,۵\})=\min(d_{۳۲}+f(۲,\{۴,۵\},d_{۳۴}+f(۴,\{۲,۵\},d_{۳۵}+f(۵,\{۲,۴\})=۱۰$$
$$f(۴,\{۲,۳,۵\})=\min(d_{۴۲}+f(۲,\{۳,۵\},d_{۴۳}+f(۳,\{۲,۵\},d_{۴۵}+f(۵,\{۲,۳\})=۱۱$$
$$f(۵,\{۲,۳,۴\})=\min(d_{۵۲}+f(۲,\{۳,۴\},d_{۵۳}+f(۳,\{۲,۴\},d_{۵۴}+f(۴,\{۲,۳\})=۹$$

مرحله ۵:

$$f(۱,\{۲,۳,۴,۵\})=$$
$$\min(d_{۱۲}+f(۲,\{۳,۴,۵\},d_{۱۳}+f(۳,\{۲,۴,۵\},d_{۱۴}+f(۴,\{۲,۳,۵\},d_{۱۵}+f(۵,\{۲,۳,۴\})$$
$$=\min(۵+۸,۸+۱۰,۳+۱۱,۲+۹)=۱۱$$

بنابراین مسیر بهینه به صورت زیر است.

$$۱\xrightarrow{۲}۵\xrightarrow{۲}۳\xrightarrow{۱}۴\xrightarrow{۵}۲\xrightarrow{۱}۱$$

سوال: شهر ابتدایی کدام شهر می‌باشد؟!

تمرین. فرض می‌کنیم اگر کسی x ریال برای زندگی‌اش مصرف کند مطلوبیتی برابر با $\sqrt{x}$ بدست خواهد آورد. شخصی در حال حاضر ۱٫۵ میلیون واحد پول دارد و پیش‌بینی می‌کند که درآمدش در دو سال آینده به ترتیب برابر ۱٫۵ و ۱ میلیون واحد باشد. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا مشخص کنید که این شخص در دو سال آینده چگونه باید خرج کند بطوریکه مجموع مطلوبیت او در دو سال آینده حداکثر شود در ضمن اینکه در پایان سال دوم مبلغ ۱ میلیون واحد پول برایش باقی بماند. این شخص می‌تواند هر سال هر مبلغ از پولش را خرج کند ولی حداقل مصرف باید یک میلیون واحد پول باشد.

راهنمایی: هر یک از سالهای اول و دوم را یک مرحله درنظر بگیرید. متغیر وضعیت را میزان پول موجود در ابتدای هر سال و متغیر تصمیم را میزان پولی که فرد در هر سال خرج می‌کند درنظر بگیرید.

پاسخ: سیاست بهینه برابر است با:

فرد باید در سال اول ۱٫۵ میلیون واحد پول و در سال دوم نیز ۱٫۵ میلیون واحد پول خرج کند.

تمرین. شخصی پولش را در حساب پس‌انداز می‌گذارد. در آخر هر سال تصمیم می‌گیرد که چه مقدار آن را به کار اندازد و چه مقدار آن را دوباره به حساب بگذارد. نرخ سود $a, (a > ۱)$ است و بهره آن که از به کار انداختن y_i در دوره i می‌برد از رابطه $g(y_i)$ بدست می‌آید. این مساله را با استفاده از فرمول-بندی پیشرو به صورت یک مدل برنامه‌ریزی پویا فرمول‌بندی کنید. با این فرض که سرمایه اولیه موجود برابر c و $g(y_i) = b_i$ که در آن b مقداری ثابت است. جواب بهینه مساله را پیدا کنید.

راهنمایی:

متغیر وضعیت: مقدار موجود در ابتدای دوره $i+۱$ام

متغیر تصمیم: مقدار سرمایه‌گذاری شده در سال iام.

تابع بازگشتی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$f_i(s_i) = \max(g_i(y_i) + f_{i-۱}(s_i + y_i))$$

سیاست بهینه برابر است با:

$$y_۱^* = y_۲^* = ... = y_{n-۱}^* = ۰ \;,\; y_n^* = a^n c \Rightarrow z^* = a^n bc$$

تمرین. تمرین بیشین را با فرض $g(y_i) = b\sqrt{y_i}$ حل کنید.

پاسخ:

$$y_i^* = \frac{a^i c}{۱ + a + ... + a^{n-۱}} \quad , i = ۱, ۲, ..., n$$

تمرین. یک راکتور در حال کار به طور سالانه در مدت کوتاهی خاموشی و مورد بررسی قرار می‌گیرد و پس از بررسی، تعمیر و یا تعویض می‌گردد. هزینه تعمیر بستگی به عمر راکتور داشته و به صورت جدول زیر است:

عمر(سال)	۱	۲	۳	۴	۵
هزینه تعمیر	۱۰۰۰	۴۰۰۰	۹۰۰۰	۱۵۰۰۰	۲۱۰۰۰

هزینه تعویض و قیمت راکتور جدید ۲۰۰۰۰ واحد پول است. طول دوره برنامه‌ریزی ۱۲ سال با شروع از یک راکتور جدید است. یک رویه بهینه جهت تعمیر و تعویض به‌گونه‌ای بدست آورید که هزینه کلی برنامه ۱۲ ساله غیر از هزینه راکتور اولیه را مینیمم کند.

جواب: در پایان سال سوم، ششم و نهم تعویض گردد و مابقی سال‌ها تعمیر گردد. هزینه کل برابر ۸۰۰۰۰ واحد پول است.

تمرین. مساله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را از طریق برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\max z = -x_{۱}^{۲} - ۲x_{۲}^{۲} + ۳x_{۲} + x_{۳}$$
$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} \le ۱$$
$$x_{۱}, x_{۲}, x_{۳} \ge ۰$$

جواب: سیاست بهینه: $x_{۱}^{۸} = ۰,\ x_{۲}^{*} = \frac{۱}{۲}, x_{۳}^{*} = \frac{۱}{۲}, z^{*} = \frac{۳}{۲}$

نکات تکمیلی این فصل

۱. برخلاف برنامه‌ریزی خطی، چارچوب استانداری برای فرموله کردن مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد.

۲. به طور کلی، حالت یعنی، وضعیتهای محتملی که سیستم می‌تواند در آن مرحله داشته باشد. تعداد حالات در هر مرحله می‌تواند متناهی و یا بینهایت باشد.

۳. در مورد مسائلی مانند کوتاهترین مسیر (مثال اول این فصل) رویه حل می‌تواند هم به صورت یک حرکت پس‌رو باشد و هم به صورت پیش‌رو. اما در مورد حل بسیاری از مسائل، مخصوصا زمانی که مرحله در رابطه با زمان باشد حتما باید از حرکت پس‌رو استفاده کرد.

۴. اگر تعداد مقادیر مربوط به s بینهایت باشد، همانند حل مسائل خطی و غیرخطی با استفاده از برنامه‌ریزی پویا که در بخش‌های ۵-۵ و ۵-۶ به آنها اشاره شده است، دیگر نمی توان هر مقدار درجه s را به طور جداگانه بررسی نمود. بلکه باید $f_n^*(x)$ و x_n^* را به صورت توابعی از s بدست آورد.

تست‌های برنامه‌ریزی پویا

بخش اول: تست‌های ساده

۱.کدامیک از موارد زیر درباره برنامه‌ریزی پویا صحت دارد:

۱) هر مسأله برنامه‌ریزی پویا شامل چندین مرحله (Stage) است و هر مرحله دارای حالات (States) مختلفی می‌باشد.

۲) تصمیمات در هر مرحله وابسته به تصمیمات مراحل دیگر است.

۳) یک رویه استاندارد برای حل مسأله برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد.

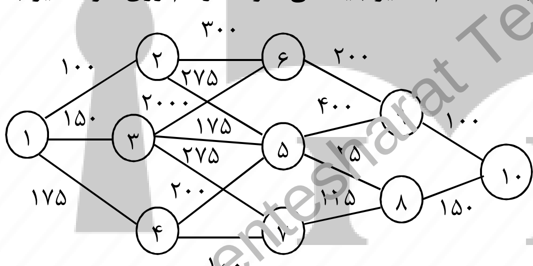
۴) همه موارد فوق.

۲. یک مسأله برنامه‌ریزی پویا رویکردی است که مسأله را به تعدادی مسائل جزیی تقسیم می‌کند که هر کدام را

۱) یک متغیر تصمیم می‌نامند. ۲) یک مرحله (Stage) می‌نامند.

۳) یک حالت (State) می‌نامند. ۳) هیچ کدام

۳. شبکه زیر را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم که مسأله را با برنامه‌ریزی پویا حل کنیم و جمع کل مسافتی که طی می‌شود ۶۵۰ کیلومتر باشد کدام مسیر باید طی شود. (ارقام روی هر مسیر به کیلومتر است.)



۱) ۱۰-۹-۶-۲-۱

۲) ۱۰-۸-۷-۳-۱

۳) ۱۰-۹-۶-۴-۱

۴) ۱۰-۸-۷-۴-۱

۴. کدام یک از موارد زیر برای یک مسأله برنامه‌ریزی پویا صادق است.

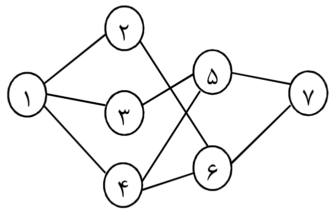
۱) مسأله برای هر مرحله حل می‌شود از مرحله آخر شروع شده و به صورت پسروی (backward) تا مرحله اولیه ادامه می‌یابد.

۲) تصمیمات هر مرحله به تصمیمات مراحل دیگر بستگی دارد.

۳) رویه استانداردی برای حل مسأله وجود ندارد.

۴) تمامی موارد فوق.

۵. با توجه به شکل، اگر فردی بخواهد از مبدأ ۱ به مقصد ۷ برسد، چند مرحله باید طی کند؟
(توجه: روش حل برنامه‌ریزی پویا است.)



۱) ۲   ۲) ۳
۳) ۵   ۴) ۷

۶. در صورت حل مسأله برنامه‌ریزی خطی با ۲ محدودیت و ۳ متغیر به روش برنامه‌ریزی پویا، این مسأله دارای ......

۱) دو مرحله و سه متغیر حالت (State) است.
۲) سه مرحله و شش متغیر حالت (State) است.
۳) سه مرحله و دو متغیر حالت (State) است.
۴) سه مرحله و یک متغیر حالت (State) است.

۷. کدام عبارت درباره برنامه‌ریزی پویا صادق نیست؟

۱) تعیین مسیر بحرانی در شبکه‌های CPM و PERT به هیچ وجه با استفاده از برنامه‌ریزی پویا عملی نیست.
۲) اصل بهینگی Bellman مبنای « تابع برگشتی» (Recursive Function) در مدل برنامه‌ریزی پویا می‌باشد.
۳) در یک مسأله کوتاهترین مسیر که با برنامه‌ریزی پویا حل می‌شود، تصمیم در هر مرحله این است که در انتقال بعدی به کدام گره برویم.
۴) متغیر حالت (State Variable) در هر مرحله (Stage) از ارزیابی با ترکیبات بالقوه متغیرهای تصمیم و متغیر حالت و در چارچوب تابع بازگشتی مربوط به حالت قبل تعیین می‌شود.

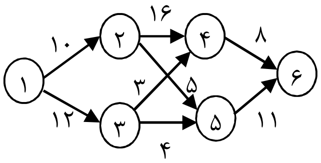
۸. درخت تصمیم‌گیری مشابه با:

۱) LP است.   ۲) DP است.   ۳) احتمالات است.   ۴) شبکه است.

۹. در برنامه‌ریزی پویا یک مرحله (stage) به چه معنی است؟

۱) محل تصمیم‌گیری   ۲) بهترین انتخاب برای هر متغیر در کل مسأله
۳) وضعیت احتمالی هر متغیر   ۴) بزرگترین جزء هر وضعیت متغیر

۱۰. در یک برنامه‌ریزی پویا برای یافتن کوتاهترین مسیر در شبکه زیر، جدول مرحله اول با استفاده از روش پس‌رو کدام است؟



۱)

S_i	S_{i+1}	D	D^*	P
۱	۲	۱۰	۱۰	۲
	۳	۱۲		

۲)

S_i	S_{i+1}	D	D^*	P
۱	۲	۱۰	۱۰	۲
	۳	۱۲	۱۲	۳

۳) با این اطلاعات نمی‌توان مسأله را با برنامه‌ریزی پویا حل کرد.

۴)

S_i	S_{i+1}	D	D^*	P
۴	۶	۸	۸	۶
۵	۳	۱۱	۱۱	۶

۱۱. در یک برنامه‌ریزی پویا مانند زیر، k نشانگر چیست؟

$$\text{Max } Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$$
$$\text{S.t} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = K$$
$$x_j \geq 0$$

۱) شاخص سیاست‌های برنامه ریزی
۲) احتمال تعیین وضعیت متغیرها
۳) متغیر محیطی و یا تعیین کننده وضعیت برنامه
۴) مدل فرعی اپتیموم

۱۲. اگر یک برنامه خطی دارای ۲ متغیر و ۴ محدودیت باشد و بخواهیم انرا با برنامه‌ریزی پویا حل کنیم، چند مرحله و چند حالت خواهیم داشت؟

۱) ۲ مرحله و ۸ حالت
۲) ۸ مرحله و ۲ حالت
۳) ۲ مرحله و ۴ حالت
۴) ۴ مرحله و ۲ حالت

۱۳. کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) برنامه‌ریزی پویا در مسائلی که در آنها رشته‌ای از تصمیم‌های مرتبط با یکدیگر مطرح باشد به کار می‌رود.

۲) برخلاف برنامه‌ریزی خطی چارچوب استانداردی برای فرموله کردن برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد.

۳) در مسائل مختلف برنامه‌ریزی پویا شکل دقیق معادله برگشت تا اندازه‌ای تغییر می‌کند.

۴) هر سه مورد

۱۴. از برنامه ریزی پویا می‌توان برای حل مسائل زیر استفاده نمود :

۱) خطی ۲) غیرخطی ۳) عدد صحیح ۴) هر سه مورد

۱۵. در برنامه‌ریزی پویا:

۱) مسأله را می‌توان به چند مرحله تقسیم نمود که در هر مرحله باید تصمیمی اتخاذ شود؛

۲) هر مرحله به تعدادی حالت (state) وابسته است.

۳) حالت عبارتست از انواع وضعیت‌های متحملی که سیستم می‌تواند در یک مرحله داشته باشد.

۴) هر سه مورد

۱۶. کدام یک از موارد زیر در یک مسأله برنامه‌ریزی پویا صحیح نیست؟

۱) بدون در نظر گرفتن اصل بهینگی، با تعیین حداقل هزینه موجود در هر مرحله، می‌توان جواب بهینه مسأله را تعیین نمود.

۲) تعداد حالات در هر مرحله می‌تواند متناهی باشد.

۳) تعداد حالات در هر مرحله می‌تواند بی نهایت باشد.

۴) ۱ و ۳

بخش اول: پاسخ تست‌های ساده

۱. گزینه ۴

تکنیک برنامه‌ریزی پویا بدین صورت است که مسأله را به چند زیر مساله تقسیم می‌کند که هر یک از این زیر مساله‌ها را یک مرحله می‌نامند. هر مرحله شامل تعدادی وضعیت می‌باشد که برای هر وضعیت تصمیمات مختلفی وجود دارد که باید بهترین تصمیم را اتخاذ نمود. اتخاذ بهترین تصمیم در هر مرحله وابسته به تصمیمات مراحل دیگر می‌باشد (تابع برگشتی را به یاد بیاورید).

۲. گزینه ۲

۳. گزینه ۳

با امتحان کردن گزینه‌ها به گزینه ۳ می‌رسیم.

گزینه ۱: $۱ \xrightarrow{۱۰۰} ۲ \xrightarrow{۳۰۰} ۶ \xrightarrow{۲۰۰} ۹ \xrightarrow{۱۰۰} ۱۰$

$۱۰۰ + ۳۰۰ + ۲۰۰ + ۱۰۰ = ۷۰۰$

گزینه ۲: $۱ \xrightarrow{۱۷۵} ۳ \xrightarrow{۳۵۰} ۷ \xrightarrow{۱۲۵} ۸ \xrightarrow{۱۵۰} ۱۰$

$۱۷۵ + ۳۵۰ + ۱۲۵ + ۱۵۰ = ۸۰۰$

گزینه ۳: $۱ \xrightarrow{۱۵۰} ۴ \xrightarrow{۲۰۰} ۶ \xrightarrow{۲۰۰} ۹ \xrightarrow{۱۰۰} ۱۰$

$۱۵۰ + ۲۰۰ + ۲۰۰ + ۱۰۰ = ۶۵۰$

گزینه ۴: $۱ \xrightarrow{۱۵۰} ۴ \xrightarrow{۲۷۵} ۷ \xrightarrow{۱۲۵} ۸ \xrightarrow{۱۵۰} ۱۰$

$۱۵۰ + ۲۷۵ + ۱۲۵ + ۱۵۰ = ۷۰۰$

۴. گزینه ۴

البته لازم به ذکر است مسائلی هستند که از ابتدا حل می‌شوند و برنامه‌ریزی پویا لزوماً یک مساله را به صورت پسروی حل نمی‌کند.

۵. گزینه ۲

۶. گزینه ۳

با توجه به متن درس، هر یک از متغیرها را به عنوان یک مرحله در نظر می‌گیریم. میزان منبع باقیمانده از هر یک از محدودیت‌ها جهت استفاده در هر مرحله را حالت آن مرحله می‌نامیم. پس به ازای هر محدودیت یک حالت هم داریم.

۷. گزینه ۱

۸. گزینه ۲

درخت تصمیم‌گیری همانند روش برنامه‌ریزی پویا برای محاسبه ارزش مورد انتظار از روش بازگشت به عقب استفاده می‌کند.

۹. گزینه ۱

۱۰. گزینه ۴

۱۱. گزینه ۳

۱۲. گزینه ۳

هر متغیر بیانگر یک مرحله و هر محدودیت بیانگر یک حالت در هر مرحله می باشد. پس چون ۴ محدودیت داریم در هر مرحله، ۴ حالت وجود دارد.

۱۳. گزینه ۴

۱۴.گزینه ۴

۱۵. گزینه ۴

۱۶. گزینه ۴

لازم به ذکر است، زمانی که متغیرها بتوانند مقادیر پیوسته اختیار کنند، تعداد حالات می‌تواند بی‌نهایت باشد.

بخش دوم: تست‌های متوسط

۱. مدل زیر در برنامه‌ریزی پویا چند مرحله دارد؟

$$\operatorname{Max} f(x)=x_1^2x_2+x_3$$

$$\text{S.t}\quad x_1x_2+x_3\le 20$$

$$x_1,x_2,x_3\ge 0 \text{ و عدد صحیح}$$

۱)یک

۲) دو

۳) سه

۴) قابل حل با برنامه‌ریزی پویا نیست.

۲. شخصی می‌خواهد از ۳ کالای الف، ب و ج کالایی را انتخاب نماید بطوریکه حداکثر ارزش را داشته باشد با توجه به داده‌های زیر و محدودیتی که از جهت مقدار و وزن وجود دارد که نمی‌تواند بیش از ۸ کیلوگرم حمل نماید، اگرمسأله از برنامه‌ریزی پویا و از مسیر پس‌رو حل شود، دارای چند مرحله، چند حالت و در مورد کالای (ج) چند متغیر تصمیم (اقدام) خواهد بود.

کالا	ارزش	وزن(کیلوگرم)
الف	۱۵	۲
ب	۱۱	۱
ج	۱۷	۳

۱) ۳ مرحله ، ۸ حالت و ۲ متغیر تصمیم

۲) ۳ مرحله ، ۹ حالت و ۳ متغیر تصمیم

۳) ۵ مرحله ، ۱۰ حالت و ۳ متغیر تصمیم

۴) ۸ مرحله ، ۳ حالت و ۲ متغیر تصمیم

۳. فرض کنید می‌خواهیم بودجه محدود ۴ میلیون تومان را روی خرید ۵ نوع سهام سرمایه‌گذاری کنیم. اگر بودجه مورد نیاز هر واحد از هر نوع سهم و بهره متوسط هر کدام مشخص باشد و بخواهیم مسأله را با برنامه ریزی پویا حل کنیم، تعداد مراحل،متغیرهای تصمیم و وضعیت هر مرحله را عبارتند از:

۱) ۵ مرحله و در هر مرحله متغیر تصمیم، میزان خرید سهم و متغیر وضعیت، بودجه باقی مانده می‌باشد.

۲) ۴ مرحله و در هر مرحله متغیر تصمیم، نحوه تقسیم هر میلیون تومان بین سهام و متغیر وضعیت، بودجه مورد نیاز هر سهم می‌باشد.

۳) ۴ مرحله و در هر مرحله متغیر تصمیم، میزان خرید سهم و متغیر وضعیت، بودجه مورد نیاز هر سهم می‌باشد.

۴) ۵ مرحله و در هر مرحله متغیر تصمیم، بهره هر سهم و متغیر وضعیت، بودجه مورد نیاز هر سهم می‌باشد.

۴. اگر مسأله زیر را از طریق برنامه‌ریزی پویا حل کنیم، در مرحله دوم، حداکثر چند حالت می‌تواند در نظر گرفته شود و چند متغیر تصمیم دارد؟

$$\text{Max } Z = 12x_1 + 7x_2 + 15x_3$$

$$\text{S.t}\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 11 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

۱) ۴,۱۱
۲) ۳,۱۱
۳) ۳,۱۲
۴) ۴,۱۲

۵. شرکتی جهت توسعه سه کارگاه خود از کارگاه اول، ۳ پیشنهاد و از کارگاه دوم و سوم، هریک ۲ پیشنهاد دریافت کرده است. بودجه‌ای که برای انجام کلیه طرح‌های توسعه در نظر گرفته شده محدود است. هزینه و درآمد هر یک از طرح‌ها برآورد شده است. این شرکت می‌خواهد با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، تعیین کند که کدام یک از پیشنهادات را انتخاب نماید که درآمد حاصل از توسعه حداکثر گردد (برای هر کارگاه امکان انجام بیش از یک طرح وجود ندارد ولی می‌تواند هیچ طرحی برای آن انجام نشود.) کدام گزینه در خصوص تعداد مراحل و مفهوم حالت در این مسأله صحیح است؟

۱) ۳ مرحله، حالت بیانگر بودجه قابل تخصیص به آن مرحله است.
۲) ۷ مرحله، حالت بیانگر بودجه قابل تخصیص به آن مرحله است.
۳) ۷ مرحله، حالت بیانگر بودجه باقیمانده یا بودجه برای آن مرحله و مراحل بعد است.
۴) ۴ مرحله، حالت بیانگر بودجه باقیمانده یا بودجه برای آن مرحله و مراحل بعد است.

۶. دلایل استفاده از برنامه‌ریزی پویا و سیمپلکس تجدید نظر شده به ترتیب کدام است؟ (عمده‌ترین دلایل)

۱) بزرگی مسأله، چگالی مسأله
۲) کوچکی مسأله، بزرگی مسأله
۳) چگالی مسأله، بزرگی مسأله
۴) چگالی مسأله، چگالی مسأله

۷. اگر برنامه‌ریزی پویا را با برنامه‌ریزی شبکه‌ای مقایسه کنیم، گره و کمان در شبکه معادل کدام مورد هستند؟

۱) گره‌ها نمایان‌گر حالت، ولی کمان‌ها به نحوه اتصال بستگی دارد.
۲) گره‌ها مرحله و کمان‌ها حالت هستند.
۳) گره‌ها حالت و کمان‌ها مرحله هستند.
۴) کمان‌ها حالت، ولی گره‌ها بستگی به نحوه قرارگیری دارند.

۸. کدام یک از موارد زیر در برنامه‌ریزی پویا صحیح نیست؟

۱) با فرض معلوم بودن حالت در یک مرحله، سیاست بهینه در مورد مراحل باقیمانده مستقل از سیاستی است که در مراحل قبل اتخاذ شده است.

۲) در پویای قطعی با معلوم بودن حالت و متغیر تصمیم در هر مرحله، حالت مرحله بعدی کاملا مشخص است.

۳) در پویای احتمالی با معلوم بودن حالت و متغیر تصمیم در هر مرحله، حالت مرحله بعدی کاملا مشخص نیست و تابع توزیع احتمالی برای هر حالت نیز نامعلوم است.

۴) در پویای احتمالی با معلوم بودن حالت و متغیر تصمیم در هر مرحله، حالت مرحله بعدی کاملا مشخص نیست ولی تابع توزیع احتمالی برای هر حالت معلوم است.

۹. کدام یک از موارد زیر در برنامه‌ریزی پویا صحیح نیست؟

۱) در هر مرحله سیاست بهینه برای تمام حالت‌های آن مرحله مشخص می‌شود.

۲) سیاست بهینه همه حالت‌های مرحله n را می‌توان با یک رابطه برگشت و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالت‌های مرحله $(n+1)$ مشخص ساخت.

۳) در مسائل مختلف برنامه‌ریزی پویا بهتر است روش حل به صورت پیش رو انجام بگیرد.

۴) هر سه مورد

۱۰. کدام یک از موارد زیر در برنامه‌ریزی پویا صحیح نیست؟

۱) در مسائل کوتاهترین مسیر، روش حل پس رو و پیش رو یک نتیجه را می‌دهد.

۲) زمان یکی از متغیرهای هر مسأله پویا است.

۳) اگر مرحله معرف زمان باشد روش حل نمی‌تواند دو طرفه باشد و لزوماً باید به صورت پس رو عمل نمود.

۴) هیچکدام

۱۱. در مسائل پویا متغیر حالت S ممکن است:

۱) گسسته باشد. ۲) پیوسته باشد. ۳) برداری باشد. ۴) هر سه مورد

۱۲. در برنامه‌ریزی پویا تعداد مرحله‌ها :

۱) حتماً محدود است. ۲) حتماً بی نهایت است.

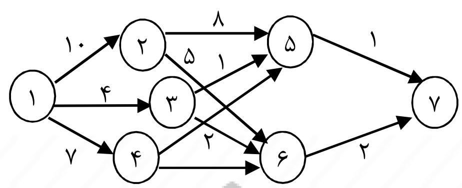
۳) ممکن است بی نهایت باشد. ۴) هیچکدام

۱۳. یک مسأله پویا دارای ۱۰ مرحله و در هر مرحله دارای ۱۰ حالت و ۱۰ متغیر تصمیم است برای حل آن :

۱) حداکثر به 10^{10} محاسبه نیاز است. ۲) حداکثر به 10^{3} محاسبه نیاز است.

۳) حداقل به 10^{3} محاسبه نیاز است. ۴) بستگی به مسأله دارد.

۱۴. شبکه کوتاهترین مسیر زیر را در نظر بگیرید. در صورت حل آن با استفاده از برنامه‌ریزی پویا :



۱) مسأله دارای سه مرحله است.

۲) در مرحله دوم گره‌های ۲، ۳ و ۴ نشان دهنده وضعیت و گره‌های ۵ و ۶ نشان دهنده متغیرهای تصمیم هستند.

۳) بهتر است حل مسأله از طریق پس رو انجام گیرد.

۴) هر سه مورد

۱۵. در صورت حل مسأله ۱۴ با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تعداد حالت‌ها برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۶. در صورت حل مسأله ۱۴ با استفاده از روش پس رو ارزش گره ۴ برابر است با:

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۷. در صورت حل مسأله ۱۴ با استفاده از روش پس رو ارزش گره ۵ برابر است با:

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۸. در صورت حل یک شبکه کوتاهترین مسیر با DP:

۱) هرگره نشان دهنده یک حالت و هر ستونی از گره‌ها نشان دهنده یک مرحله است.

۲) هرگره نشان دهنده یک مرحله و هر ستونی از گره‌ها نشان دهنده یک حالت است.

۳) هرگره نشان دهنده یک متغیر تصمیم و هر ستونی از گره‌ها نشان دهنده یک حالت است.

۴) شبکه کوتاهترین مسیر را نمی‌توان با پویا حل نمود.

۱۹. کدام یک از موارد زیر در مورد برنامه‌ریزی پویا صحیح نیست؟

۱) یک مسأله پویا مرحله به مرحله حل شده و در هر مرحله فقط راه‌حل‌های ممکن در نظر گرفته می‌شود.

۲) یک مسأله پویا مرحله به مرحله حل شده و در هر مرحله تمام راه‌حل‌های ممکن و غیرممکن در نظر گرفته می‌شود.

۳) برای هر حالت مجموعه‌ای از اقدام وجود دارد که از بین آنها بهترین انتخاب می‌شود مجموعه این اقدام را متغیر تصمیم می‌نامند.

۴) بهترین تصمیم برای یک مسأله را سیاست بهینه می‌نامند.

۲۰. فرض کنید با ۴ واحد پولی بتوان در سه پروژه سرمایه‌گذاری نمود. در ازای مقادیر مختلف سرمایه‌گذاری در هر پروژه سودی حاصل می‌شود که در جدول زیر دیده می‌شود:

در صورت حل آن با برنامه‌ریزی پویا، حالت در هر مرحله چندتاست و نشان دهنده چیست؟

میزان سرمایه‌گذاری	سود پروژه		
	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰
۱	۲	۳	۵
۲	۴	۵	۸
۳	۷	۷	۹
۴	۱۱	۱۰	۱۰

۱) ۳ تا، سود

۲) ۳ تا ، میزان سرمایه‌گذاری در پروژه

۳) ۵ تا ، موجودی سرمایه (سرمایه باقیمانده)

۴) ۴ تا ، موجودی سرمایه (سرمایه باقیمانده)

۲۱. مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = ۳x_۱ + ۸x_۲$$
$$۲x_۱ + ۳x_۲ \leq ۳۶$$
$$x_۱ \leq ۱۵$$
$$x_۲ \leq ۱۰$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۱) نمی‌توان آن را با پویا حل نمود.

۲) در صورت حل آن با پویا، دو مرحله و سه متغیر حالت موجود است.

۳) در صورت حل آن با پویا، سه مرحله و دو متغیر حالت موجود است.

۴) در صورت حل آن با پویا، متغیر حالت گسسته است.

۲۲. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Max z &= x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) نمی‌توان آن را با پویا حل نمود.

۲) در صورت حل آن با پویا، سه مرحله و یک متغیر حالت وجود دارد.

۳) در صورت حل آن با پویا، متغیر حالت پیوسته است.

۴) ۲ و ۳

۲۳. سه نوع کالا را می‌توان در یک کشتی حمل نمود. ظرفیت حمل کشتی ۸ واحد وزنی است. اگر وزن و سود هر واحد از این کالاها به قرار جدول زیر باشد :

سود (واحد پولی)	وزن (واحد وزنی)	کالا
۳۰	۴	۱
۱۸	۲	۲
۸	۱	۳

برای حل با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، در مرحله دوم، مسأله دارای چند حالت و چند متغیر تصمیم (اقدام) است.

۱) ۸ ، ۸ ۲) ۸ ، ۴ ۳) ۸ ، ۲ ۴) ۹ ، ۵

بخش دوم: پاسخ تست‌های متوسط

۱. گزینه ۳

با توجه به توضیحات سئوال ۶ بخش ساده گزینه ۳ درست است.

۲. گزینه ۲

با توجه به متن درس(مساله کوله‌پشتی) ، به ازای هر یک از کالاها یک مرحله داریم. پس در کل ۳ مرحله داریم.

مساله به صورت زیر است:

$$\max z = 15x_1 + 11x_2 + 17x_3$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8$$

تعداد حالات ممکن در هر مرحله برابر فضای باقیمانده در مرحله iام برای تخصیص کالای iام می‌باشد پس در مرحله iام می‌تواند ۰، ۱، ۲ و ... و ۸ فضا باقی مانده باشد، پس ۹ حالت داریم.

چون تعداد صحیحی از کل کالا را می‌توان حمل نمود در مورد کالای ج داریم:

$$\left[\frac{\text{ظرفیت کوله پشتی}}{\text{وزن کالای ج}}\right] = \left[\frac{8}{3}\right] = 2$$

پس متغیر تصمیم در مورد کالای ج به این صورت است که یا اصلا از کالای ج حمل نکند، یا یک کالا حمل کند و یا ۲ کالا حمل کند. پس ۰ و ۱ و ۲ متغیرهای تصمیم می‌باشند. (۳ متغیر تصمیم داریم.)

۳. گزینه ۱

با توجه به متن درس در قسمت سرمایه‌گذاری، هر یک از سهام‌ها به مانند هر یک از پروژه‌ها در متن درس بیانگر یک مرحله هستند. پس ۵ مرحله داریم، و میزان باقیمانده از بودجه در هر مرحله برای خرید هر یک از سهام‌ها یک حالت به حساب می‌آید. و میزان خرید هر سهم در هر مرحله، تصمیم‌گیری ما را در همان مرحله مشخص می‌سازد.

۴. گزینه ۴

به جواب تست ۱ و ۲ بخش متوسط مراجعه کنید. دقت کنید از آنجا که ضریب x_2 در محدودیت ۳ می‌باشد با توجه به صحیح بودن متغیرهای تصمیم، از x_2 می‌توان صفر،یک، دو و یا ۳ محصول را تولید کرد.

۵. گزینه ۴

این مساله همانند مساله سرمایه‌گذاری می‌باشد، به ازای هر کارگاه یک مرحله داریم و در هر مرحله، بودجه‌ای که در مرحله قبلی مصرف نشده و باقی مانده است بیانگر حالت در همان مرحله می‌باشد.

۶. گزینه ۱

همانطور که در متن درس اشاره شد، یکی از مهمترین دلایل استفاده از برنامه ریزی پویا، بزرگی مساله می‌باشد. در مورد سیمپلکس تجدید نظر شده هم باید گفت: هر چه چگالی مساله کمتر باشد(تعداد ضرایب مخالف صفر کمتر باشد) استفاده از روش سیمپلکس تجدید نظر شده سبب کاهش در محاسبات کامپیوتری می‌شود.

۷. گزینه ۳

۸. گزینه ۲

گزینه ۱: تعریف اصل بهینگی را نشان می‌دهد.
گزینه ۲ در حالت برنامه‌ریزی پویای قطعی، اگر تمامی حالات و متغیر تصمیم در هر مرحله مشخص باشند، حالت مرحله بعدی کاملا مشخص است.
گزینه ۳و ۴: در حالت برنامه‌ریزی پویای احتمالی، به دلیل احتمالی بودن حالات و متغیرهای تصمیم در هر مرحله، حالت مرحله بعدی مشخص نمی‌باشد. هر چند اینکه با چه احتمالی به کدامین وضعیت انتقال می‌یابد معلوم می‌باشد(تابع توزیع احتمالی معلوم می‌باشد.).

۹. گزینه ۳

اگرچه به ظاهر روش رو به جلو منطقی‌تر به نظر می‌رسد اما در بسیاری از مسائل، روش برگشت به عقب کارائی بهتری دارد اما بعضی از مسائل برنامه‌ریزی پویا را می‌توان با استفاده از روش پیش‌رو هم حل نمود.

۱۰. گزینه ۲

۱۱. گزینه ۴

۱۲. گزینه ۳

به جواب تست ۲۶ دقت کنید.

۱۳. گزینه ۲

با توجه به متن درس، گزینه ۲ درست می‌باشد.

۱۴. گزینه ۴

کارائی حل این مساله، با استفاده از روش پس‌رو بیشتر است.

۱۵. گزینه ۳

در مرحله اول، گره‌های ۵ و ۶، در مرحله دوم، گره‌های ۲ و ۳ و ۴ و در مرحله سوم، گره ۱ حالت می‌باشند. و به طور مثال در مرحله سوم، گره‌های ۲و ۳و ۴، متغیرهای تصمیم در این مرحله می‌باشند.

۱۶. گزینه ۳

نیازی نیست دو جدول مربوط به مراحل سوم و دوم را حل کنیم. فقط کافیست کوتاهترین فاصله از تمامی مسیرهای ممکن از گره ۴ تا مقصد (گره ۷) را پیدا کنیم:

$$\min(۴ \to ۵ \to ۷, ۴ \to ۶ \to ۷) = \min(۴+۱, ۱۰+۲) = ۵$$

دقت کنید روش مورد نظر، برگشت به عقب بوده است. اگر در همین سئوال، روش حل رو به جلو بود ارزش گره ۴، ۷ بوده است. (چرا؟)

۱۷. گزینه ۴

در مرحله اول، از گره ۱ به یکی از سه گره ۲، ۳ و ۴ می‌توان حرکت کرد:

کوتاهترین فاصله گره ۱ تا گره ۲ = ۱

کوتاهترین فاصله گره ۱ تا گره ۳ = ۴

کوتاهترین فاصله گره ۱ تا گره ۴ = ۷

در مرحله دوم باید کوتاهترین مسیرها را تا گره ۵ پیدا کنیم:

کوتاهترین فاصله هر گره تا گره ۵ که از رابطه زیر بدست می‌آید:

"کوتاهترین فاصله گره ۱ تا گره i + کوتاهترین فاصله گره i تا گره ۵"

پس اگر از گره ۲ به گره ۵ برویم، طبق رابطه فوق داریم: $۹ = ۸ + ۱$

اگر از گره ۳ به گره ۵ برویم: $۵ = ۱ + ۴$

و اگر از گره ۴ به گره ۵ برویم: $۱۱ = ۴ + ۷$

پس کوتاهترین فاصله ممکن تا گره ۵ برابر است با

$$\min(۹, ۵, ۱۱) = ۵$$

۱۸. گزینه ۱

۱۹. گزینه ۲

۲۰. گزینه ۳

دقت شود در هر پروژه تنها می‌توان مقادیر صحیحی را سرمایه‌گذاری کرد. به همین دلیل در هر مرحله، ۵ حالت وجود دارد. بدین معنا که به یک پروژه خاص، می‌توان ۰، ۱،۲،۳ و یا ۴ واحد را اختصاص داد.

۲۱. گزینه ۲

۲۲. گزینه ۴

۲۳. گزینه ۴

با توجه به متن درس در قسمت حل مسائل کوله پشتی با استفاده از برنامه‌ریزی پویا، از آنجا که ظرفیت کشتی، ۸ واحد می‌باشد و با تخصیص هر یک واحد از کالای نوع ۲، به میزان ۲ واحد از فضای انبار اشغال می‌شود پس از کالای نوع ۲ می‌توان صفر،یک، دو، سه و یا چهار واحد را حمل نمود.

بخش سوم: تست‌های سخت

۱. در صورتی که در یک مسأله برنامه ریزی پویا، $f_n(s)$ حداقل هزینه بهینه تخصیص یافته، مقدار s واحد از منابع برای n کارخانه اول بوده و C_{nj} هزینه و x_{nj} مقدار تقاضای محصول از نوع j برای کارخانه n باشد، تابع برگشتی انتقال وضعیت مسأله کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $f_1(s) = \operatorname{Min} C_{1j} \;, x_{1j} \le s \;, f_n(s) = \operatorname{Min}\left[C_{nj} + f_{n+1}\left(s + x_{nj}\right)\right] \; n > 1 \,, x_{nj} \le s$

۲) $f_1(s) = \operatorname{Min} C_{1j} \;, x_{1j} \le s \;, f_n(s) = \operatorname{Min}\left[C_{nj} + f_{n+1}\left(s - x_{nj}\right)\right] \; n > 1 \,, x_{nj} \le s$

۳) $f_1(s) = \operatorname{Min} C_{1j} \;, x_{1j} \le s \;, f_n(s) = \operatorname{Max}\left[C_{nj} + f_{n-1}\left(s - x_{nj}\right)\right] \; n > 1 \,, x_{nj} \le s$

۴) $f_1(s) = \operatorname{Min} C_{1j} \;, x_{1j} \le s \;, f_n(s) = \operatorname{Min}\left[C_{nj} + f_{n-1}\left(s - x_{nj}\right)\right] \; n > 1 \,, x_{nj} \le s$

۲. می‌خواهیم برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی انبار یک کارگاه را برای هر یک از ماه‌های سال آینده، به کمک برنامه‌ریزی پویا انجام دهیم. در این صورت:

۱) تعداد مراحل ۱۲ و در هر مرحله، متغیر تصمیم میزان تولید در ماه است.

۲) تعداد مراحل ۱۲ و در هر مرحله، متغیر تصمیم میزان تقاضا در ماه است.

۳) تعداد مراحل ۱۲ و در هر مرحله، متغیر تصمیم میزان موجودی انبار است.

۴) تعداد مراحل ۱۲ و در هر مرحله، متغیر تصمیم میزان هزینه تولید است.

۳. فرض کنید b واحد از یک منبع را برای انجام t فعالیت در اختیار داشته باشیم. در صورتی که فعالیت t در سطح x_t انجام شده باشد $(x_t \ge 0)$ به این ترتیب $g_t(x_t)$ واحد از منبع مورد نظر توسط فعالیت t مصرف شده است و سودی معادل $r_t(x_t)$ به دست آمده است. در صورتی که مدل عمومی این مسأله به صورت:

$$\begin{cases} \operatorname{Max} \displaystyle\sum_{t=1}^{t=T} r_t(x_t) \\ \text{S.t} \\ \displaystyle\sum_{t=1}^{t=T} g_t(x_t) \le w \end{cases}$$

فرض شود و قرار باشد برای حل مسأله از روش برنامه‌ریزی پویا استفاده شود، برای حداکثر سود حاصل از انجام فعالیت‌ها در نظر گرفته شده است. کدام گزینه تابع انتقال وضعیت (برگشتی) روش برنامه‌ریزی پویا را نشان می‌دهد؟

۱) $f_{(t)}(d) = Max\{r_t(x_t) + f_{t+1}(d - g_t(x_t))\}$

۲) $f_{(t)}(d) = Max\{r_t(x_t) - f_{t+1}(d - g_t(x_t))\}$

۳) $f_{(t)}(d) = Min\{r_t(x_t) - f_{t+1}(d - g_t(x_t))\}$

۴) $f_{(t)}(d) = Max\{r_t(x_t) + f_{t+1}(d + g_t(x_t))\}$

بخش سوم: پاسخ تست‌های سخت

۱. گزینه ۴

طبق تعریف تابع برگشتی برای این مساله، ارزشی که در این مرحله داریم یعنی C_{nj} را به اضافه ارزش حاصله از مراحل بعدی یعنی $f_{n-1}(s - x_{nj})$ به دست می‌آوریم. $s - x_{nj}$ به این مناسبت که هر چه قدر در این مرحله منبع به x_{nj} اختصاص می‌یابد، از منبع باقیمانده برای استفاده در مرحله بعدی کاسته می‌شود. نکته دیگری که حائز اهمیت است اگر به صورت سئوال دقت شود، $f_1(s)$ را داده است. پس در مراحل بعدی به دنبال بدست آوردن $f_2(s), f_3(s), ..., f_n(s)$ هستیم. در صورتی که گزینه‌های ۱ و ۲، عکس این موضوع را نشان می‌دهند. گزینه ۳ هم به این دلیل غلط می‌باشد که تابع برگشتی را برخلاف صورت سئوال، از نوع ماکزیمم تعریف کرده است.

۲. گزینه ۱

هر ماه از سال، بیانگر یک مرحله می‌باشد. در هر ماه باید تصمیم گرفته شود که چه میزان تولید صورت پذیرد. البته این امر بسته به اینکه چه میزان از ماه پیش باقی مانده است هم دارد.

سؤال: وضعیت در هر یک از ماه های سال به چه صورت تعریف می‌شود؟ میزان موجودی در ابتدای هر ماه بیانگر حالت یا وضعیت می‌باشد.

۳. گزینه ۱

به جواب تست ۱ بخش سخت مراجعه کنید. دقت شود، میزانی که در مرحله $t+1$ می‌تواند صرف فعالیت $t+1$ شود بستگی به این دارد که در مرحله t چه میزان از منبع مورد نظر مصرف شده است($g_t(x_t)$). پس باقیمانده منبع برای انتقال به مرحله بعدی عبارتست از: $d - g_t(x_t)$