مدل برنامه‌ریزی خطی ـ روش ترسیمی

روش ترسیمی

روش ترسیمی، یک روش علمی و معمولی برای حل همه‌ی مسائل برنامه‌ریزی خطی نیست. این روش تنها جهت حل مدل‌هایی که در آن‌ها حداکثر دو متغیر وجود دارد کاربرد دارد، که با استفاده از دو محور افقی و عمودی مختصاتی می‌توان مدل را حل نمود. هم‌چنین با توجه به بخش سوم مدل که مشخص می‌کند متغیرهای تصمیم بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند یا آزاد در علامت ربع مثلثاتی که در دستگاه مختصاتی نیاز داریم، مشخص می‌شود.

الگوریتم روش ترسیمی

گام اول: محدودیت‌ها را به صورت خط در نظر گرفته و در دستگاه مختصاتی ترسیم می‌کنیم و بعد بسته به علامت آن‌ها جهت محدودیت را معین می‌کنیم.

گام دوم: مناطقی که محدودیت‌های مختلف آن‌ها را قبول دارند به اشتراک گذاشته و منطقه موجود مسأله را مشخص می‌کنیم.

گام سوم: در داخل منطقه موجه نقطه‌ای که در یکی از نقاط گوشه حتماً قرار دارد به عنوان نقطه‌ی بهینه معین می‌کنیم، به صورتی که ابتدا، نقاط گوشه را در تابع هدف جایگذاری می‌کنیم و بعد بهترین آن‌ها را به عنوان نقطه بهینه تعیین می‌کنیم.

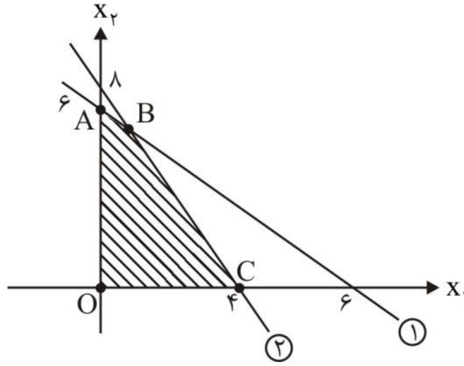
تذکر ۱: هدف مسأله برنامه‌ریزی خطی تعیین نقاطی از بین نقاط موجه است که تابع هدف را به بهترین مقدار خود برساند.

تذکر ۲: هر نقطه موجه در یک مسأله Lp که مقدار تابع هدف را به بهترین مقدار خود با توجه به سایر نقاط موجه برساند نقطه بهینه یا جواب بهینه گویند.

مثال: مسأله‌ی Lp زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}\, z = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \geq 0$$

ابتدا محدودیت‌های مسأله را به صورت معادله (تساوی) در نظر گرفته، خطوط آن را رسم می‌کنیم. سپس ناحیه پذیرش هر یک از محدودیت‌ها را مشخص می‌کنیم. اشتراک نواحی به دست آمده فضای قابل قبول مسأله است.



ناحیه OABC منطقه موجه این مسأله است.

در فضای حل فوق، تعداد بی‌نهایت جواب قبول وجود دارد. برای به دست آوردن بهترین جواب، مختصات تمام نقاط گوشه‌ای منطقه موجه را در داخل تابع هدف قرار داده و بهترین مقدار را به عنوان مقدار بهینه تابع هدف انتخاب می‌کنیم که در این مثال داریم:

مختصات نقطه B: $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$

نقطه O $(0,0) \Rightarrow z = 0$

نقطه A $(0,6) \Rightarrow z = 12$

نقطه B $(2,4) \Rightarrow \boxed{z^* = 14}$

نقطه C $(4,0) \Rightarrow z = 12$

⇐ به طور کلی در روش ترسیمی، ۴ مدل سؤال مطرح می‌گردد که به توضیح و بررسی تک‌تک آن‌ها خواهیم پرداخت:

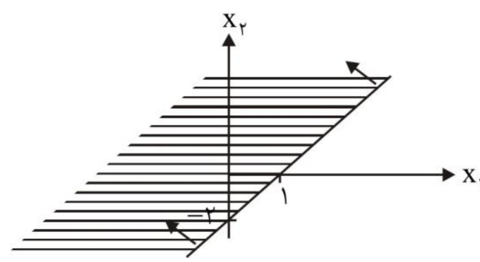
۱- محدودیت‌ها:

ناحیه شدنی یک مسأله Lp توسط محدودیت‌های مسأله مشخص می‌گردد.

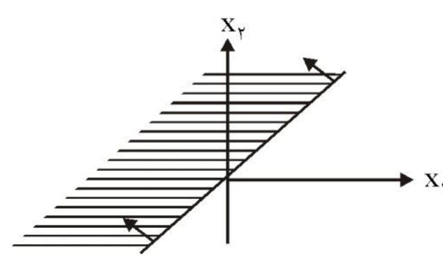
الف) رسم محدودیت:

برای رسم محدودیت از مبدأ مختصات شروع می‌کنیم:

مثال: $2x_1 - x_2 \leq 2$



مثال: $x_1 \leq 2x_2$



لازم به ذکر است که در چنین محدودیت‌هایی جهت محدودیت به سمت متغیری می‌باشد که جهت علامت بزرگ‌تر یا مساوی به سمت آن متغیر باشد، در این مثال چون جهت علامت بزرگ‌تر یا مساوی به سمت متغیر x_2 می‌باشد پس جهت محدودیت نیز به سمت متغیر x_2 می‌باشد.

تذکر: به طور کلی در یک دسته‌بندی، محدودیت‌های مسأله Lp به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- محدودیت زائد: محدودیتی است که تأثیری در ایجاد منطقه موجه ندارد و وجود یا عدم وجود آن موجب تغییر منطقه موجه و جواب بهینه نمی‌شود.

تذکر: محدودیت زائد، همواره یک محدودیت غیرفعال (غیرالزام‌آور) می‌باشد.

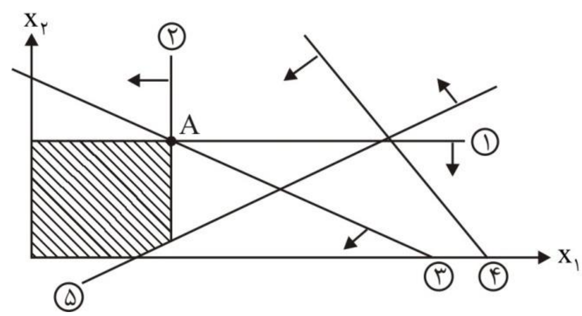
۲- محدودیت مؤثر: محدودیتی است که در ایجاد منطقه موجه مؤثر است و با حذف آن حتماً منطقه موجه بزرگ‌تر شده و جواب بهینه بدتر نمی‌شود.

تذکر: در دسته‌بندی دیگری محدودیت‌ها به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱- محدودیت الزام‌آور: محدودیت مؤثری است که نقطه بهینه روی آن قرار دارد.

۲- محدودیت غیرالزام‌آور: محدودیتی است که نقطه بهینه روی آن قرار ندارد.

مثال: اگر A نقطه بهینه باشد نوع محدودیت‌ها را در شکل زیر مشخص کنید:



محدودیت (۱): مؤثر الزام‌آور

محدودیت (۲): مؤثر الزام‌آور

محدودیت (۳): زائد غیر الزام‌آور

محدودیت (۴): زائد غیر الزام‌آور

محدودیت (۵): مؤثر غیرالزام‌آور

تذکر: هر محدودیت الزام‌آور، حتماً مؤثر است اما عکس آن همیشه صحیح نیست.

تذکر: در صورت حذف یا اضافه شدن یک محدودیت در یک مسأله داریم:

❋ حذف کردن محدودیت:

الف) اگر محدودیت مؤثر باشد: مقدار تابع هدف را بدتر نمی‌شود.

ب) اگر محدودیت زائد باشد: مقدار تابع هدف را تغییری نمی‌دهد.

❋ اضافه کردن محدودیت:

الف) اگر محدودیت مؤثر باشد: مقدار تابع هدف را بهتر نمی‌شود.

ب) اگر محدودیت زائد باشد: مقدار تابع هدف را تغییری نمی‌دهد.

محدودیت‌های قدرمطلقی:

برای ترسیم این نوع محدودیت‌ها، ابتدا باید آن‌ها را از داخل قدرمطلق خارج کرده سپس محدودیت‌های مسأله را ترسیم نموده و مقدار بهینه متغیرها را مشخص نماییم.

مثال:

$$|x_1 - 2x_2| \le 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \ge -4 \end{cases}$$

مثال:

مربوط به بحث برنامه‌ریزی صفر و یک می‌باشد در فصل مربوطه کامل توضیح داده خواهد شد. $|x_1-2x_2|\geq 4 \;\Rightarrow$

متغیرهای کمکی (S_i):

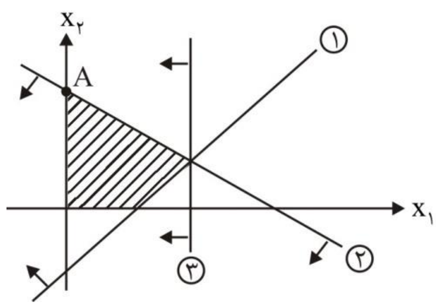
* وضعیت متغیرهای کمکی نسبت به محدودیت‌ها:

۱) $S_i=0 \;\Leftarrow$ روی محدودیت مورد نظر قرار دارد.

۲) $S_i>0 \;\Leftarrow$ داخل محدودیت مورد نظر قرار دارد.

۳) $S_i<0 \;\Leftarrow$ خارج محدودیت مورد نظر قرار دارد.

مثال:



در نقطه‌ی A: $\begin{cases} S_1>0 \\ S_2=0 \\ S_3>0 \end{cases}$

* نقش متغیرهای کمکی:

متغیرهای کمکی برای استاندارد کردن و یا متعارف کردن محدودیت‌های مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

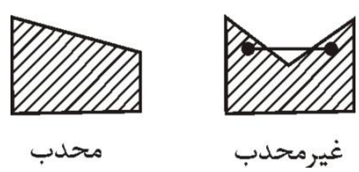
مثال: $2x_1+x_2\leq 4 \;\Rightarrow\; 2x_1+x_2+S_1=4$

$2x_1+x_2\geq 4 \;\Rightarrow\; 2x_1+x_2-S_1=4$

۲- منطقه موجه

تعریف: به اشتراک بین محدودیت‌های یک مسأله، منطقه موجه گویند.

تذکر: منطقه موجه، همواره محدب است.



* **محدب:** در داخل فضای محدب هر دو نقطه‌ای که به هم وصل شوند را محدب گویند ولی اگر از فضای داخلی خارج شود، غیرمحدب می‌گردد.

تذکر ۱: منطقه موجه محدود است و یک چندضلعی بسته است.

تذکر ۲: منطقه موجه نامحدود است اگر منطقه از سمت یکی از متغیرها تا بی‌نهایت باز باشد.

تذکر ۳: بدون منطقه: هرگاه وجه اشتراکی میان محدودیت‌های مسأله نتوان ایجاد کرد.

مثال: مدل زیر را در نظر بگیرید، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است:

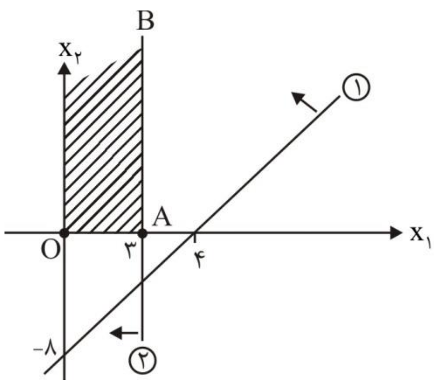
$$\min z = 3x_1 - x_2$$
$$2x_1 - x_2 \le 8$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) منطقه محدود – جواب = ۸
۲) منطقه نامحدود – جواب = ۱۲
۳) منطقه نامحدود – جواب = $-\infty$
۴) منطقه محدود – جواب = بی‌نهایت

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

ابتدا محدودیت‌های مسأله را به صورت زیر ترسیم نموده، سپس مقدار بهینه مسأله را محاسبه می‌کنیم:

در نقطه O $(0,0) \Rightarrow z = 0$
در نقطه‌ی A $(3,0) \Rightarrow z = 9$
در نقطه B $(3,+\infty) \Rightarrow z = 9 - \infty = -\infty$



مثال: منطقه و جواب در مدل زیر به چه صورت است؟

$$\min z = 3x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 \le 8 \quad (۱)$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 2 \quad (۲)$$
$$x_1 + 2x_2 \le 9 \quad (۳)$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 3 \quad (۴)$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

پاسخ:

با توجه به محدودیت‌های ۲ و ۴ داریم:

$$(3x_1 + 2x_2 \ge 2) \times 2 \Rightarrow 6x_1 + 4x_2 \ge 4$$

محدودیت ۴: $6x_1 + 4x_2 \le 3$

در نتیجه: همدیگر را نقض کرده و اشتراکی نداریم بنابراین منطقه نداریم، جواب هم نداریم.

مثال: مقدار تابع هدف در مسأله زیر کدام است؟

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$
$$2x_1 - x_2 \le 8$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$x_1 - 2x_2 \ge 3$$
$$x_1 + x_2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) ۸ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) جواب ندارد

پاسخ: گزینه (۴) صحیح است.

محدودیت معروف $x_1 + x_2 \le 0$ اگر در محدودیت‌های مسأله باشد و متغیرها هم شرط بزرگ‌تر یا مساوی صفر را داشته باشند، در این حالت مسأله اگر جواب داشته باشد، تنها جواب آن نقطه $(0,0)$ می‌باشد، اما باید ابتدا این نقطه را در سایر محدودیت‌ها جایگذاری کنید، سپس اگر همه‌ی آن‌ها این نقطه را قبول داشتند جواب $(0,0)$ بوده، ولی اگر تنها یکی هم قبول نداشته باشد، مساله جواب ندارد. در این مثال نقطه $(0,0)$ در محدودیت سوم مسأله $(x_1 - 2x_2 \ge 3)$ صدق نمی‌کند، پس در نتیجه مسأله جواب ندارد.

مثال: مقدار تابع هدف مسأله زیر کدام است؟

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$2x_1 - x_2 \le 16$$
$$6x_1 + 4x_2 = 8$$
$$x_1 - x_2 \ge -3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) $+\infty$ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) جواب ندارد

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به محدودیت مسأله داریم:

$$(6x_1 + 4x_2 = 8) \div 2 = \underbrace{3x_1 + 4x_2}_{\text{تابع هدف می باشد}} = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{z^* = 4}$$

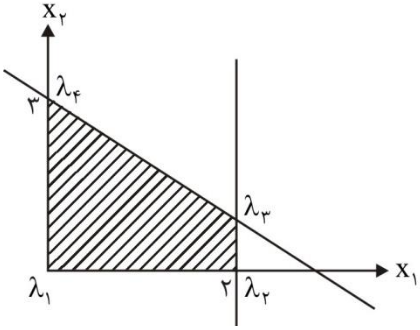
تذکر: ممکن است در سؤالاتی که چندین محدودیت دارند، یک محدودیت مساوی دقیقاً نسبتی از تابع هدف باشد، در این صورت می‌توانیم از آن محدودیت مساوی جهت تعیین مقدار از تابع هدف استفاده کنیم.

⇐ نوشتن منطقه در فضای اقلیدسی (λ):

هرگاه بخواهیم یک مجموعه محدب را به صورت ترکیب خطی بین n نقطه گوشه آن $(x_1, \ldots, x_n)$ در نظر بگیریم، این ترکیب خطی به صورت زیر است:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad 0 \le \lambda_i \le 1$$

مثال: منطقه موجه مسأله Lp زیر را به صورت ترکیب محدب بنویسید.



$$X_1 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3$$
$$X_2 = \lambda_3 + 3\lambda_4$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le \lambda_i \le 1$$

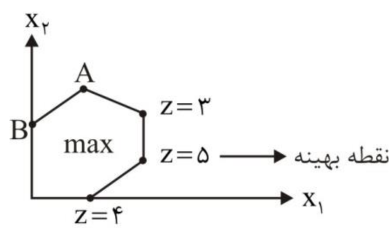
گوشه‌های منطقه موجه:

الف) موجه:

الف -۱) بهینه: همواره از دو نقطه کناری خودش شرایط بهتری داشته باشد.

الف – ۲) غیربهینه

مثال:



ب) غیرموجه

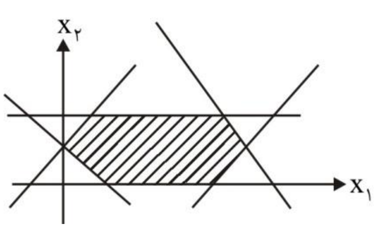
محاسبه تعداد کل گوشه‌ها (اعم از موجه و غیرموجه):

تعداد محدودیت‌ها $= m$

تعداد متغیرهای تصمیم $= n$

$$\text{تعداد نقاط گوشه‌ای (موجه و غیرموجه)} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

مثال: تعداد نقاط گوشه‌ای منطقه موجه زیر چند است؟



$$\binom{5+2}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

جهت حرکت در داخل یک منطقه موجه:

الف) تمام محدودیت‌ها به صورت $\le$ باشند:

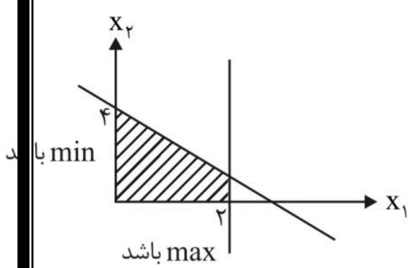
همواره برای تعیین جهت حرکت به ضریب تابع هدف متغیرها نگاه می‌کنیم.

اگر max: متغیری که ضریب بیش‌تری دارد.

اگر min: متغیری که ضریب کم‌تری دارد.

مثال:

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\min z = 5x_1 + 2x_2$$

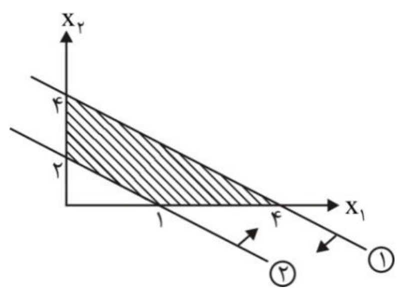


ب) حداقل یک محدودیت به صورت $\geq$ یا $=$ باشد:

اگر در مسأله‌ای حداقل یک محدودیت علامت $\geq$ یا $=$ داشته باشد جهت حرکت به تابع هدف ربطی نداشته و جهت حرکت به سمت متغیری است که مجموع ضرایب آن متغیر در محدودیت‌های $\geq$ یا $=$ بیش‌تر باشد.

مثال:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \geq 2$$



$1+2=3$ = مجموع ضرایب متغیر x_1 در محدودیت‌ها

$1+1=2$ = مجموع ضرایب متغیر x_2 در محدودیت‌ها $\Rightarrow$ جهت حرکت به سمت متغیر x_1 می‌باشد

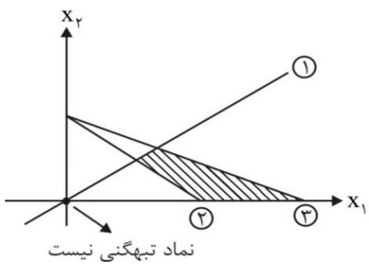
بررسی انواع جواب‌ها در روش ترسیمی:

انواع جواب‌ها:
- پایه‌ای:
  - موجه:
    - بهینه: نقاط گوشه‌ای موجه که بهترین مقدار را برای تابع هدف ایجاد کنند.
    - غیربهینه
  - غیرموجه
- غیرپایه‌ای:
  - موجه:
    - بهینه: در صورتی که تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌های الزام‌آور مسأله باشد. به این‌گونه جواب‌ها بهینه چندگانه گویند که در بخش حالات خاص بررسی خواهد شد.
    - غیربهینه
  - غیرموجه

۳- حالت‌های خاص:

۱- حالت خاص تبهگنی:

هرگاه در یک فضای n بعدی (دارای n متغیر تصمیم هستیم)، حداقل $n+1$ خط، همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، اصطلاحاً حالت خاص تبهگنی به وجود می‌آید و به این مفهوم است که در یک نقطه هم‌زمان چندین نقطه گوشه (گوشه موجه) بر روی یکدیگر قرار گرفته‌اند.



حالات تبهگنی:

الف) **تبهگن دائم:** اگر نقطه‌ای گوشه‌ای که بر روی آن حالت خاص تبهگنی اتفاق افتاده، نقطه بهینه باشد به آن تبهگن دائم گویند.

ب) **تبهگن موقت:** اگر نقطه‌ای گوشه‌ای که بر روی آن حالت خاص تبهگنی اتفاق افتاده، نقطه بهینه نباشد به آن تبهگن موقت گویند.

تعداد نقاط واقع در یک گوشه تبهگن:

در حالت تبهگنی برای تشخیص تعداد نقاط گوشه‌ای که بر روی یکدیگر قرار گرفته‌اند کافی است ترکیب ۲ از تعداد خطهایی که با هم برخورد کرده‌اند را به دست آوریم.

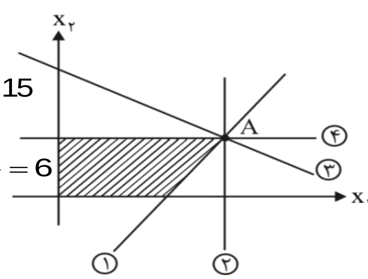
x: تعداد خطهایی که با هم برخورد کرده‌اند

$$\text{تعداد نقاط واقع در یک گوشه تبهگن} = \binom{x}{2}$$

مثال: تعداد نقاط گوشه و تعداد نقاط گوشه‌ای که در نقطه A بر روی هم قرار گرفته‌اند چند است؟

$$\text{تعداد نقاط گوشه‌ای کل (موجه ـ غیرموجه)} = \binom{m+n}{m} = \binom{4+2}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$\text{تعداد نقاط گوشه‌ای نقطه A} = \binom{\text{ÊÚÏÇÎ ØæØÊ áÇÞí}}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$



تذکر: در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، راه دیگری که برای تشخیص حالت خاص تبهگنی وجود دارد به این صورت است که اگر نسبت تقسیم اعداد سمت راست بر ضرایب یک متغیر در تمام محدودیت‌ها، یکسان باشد، حالت خاص تبهگنی داریم.

مثال: در مسأله‌ی زیر مقدار تابع چه مقداری است و مسأله چه حالت خاصی دارد؟

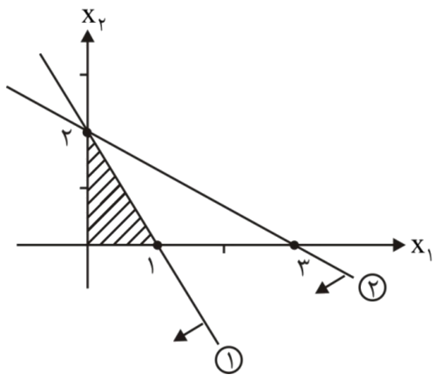
$$\min z = x_1 - x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) $z^* = 0$، بهینه چندگانه
۲) $z^* = -2$، تبهگن دائم
۳) $z^* = -2$، تبهگن موقت
۴) $z^* = 0$، تبهگن

پاسخ: گزینه (۲) صحیح است.

ابتدا مدل را ترسیم کرده و داریم:

با توجه به شکل مشخص است که در نقطه $x_2 = 2$ حالت خاص تبهگنی رخ داده است که بدون ترسیم شکل و با توجه به تذکر قبل می‌توان تقسیم اعداد سمت راست بر ضرایب متغیر x_2 که در تمام محدودیت‌ها یکسان است به حالت خاص تبهگنی رسید که چون نقطه بهینه بر روی آن قرار دارد حالت خاص تبهگنی از نوع دائم است.

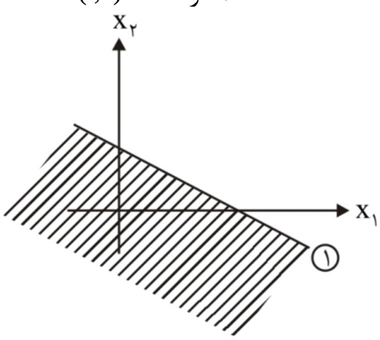


$z = 0$: در نقطه $(0,0)$

$z = 1$: در نقطه $(1,0)$

$z^* = -2$: در نقطه $(0,2)$

مثال: مسأله زیر با منطقه موجه مشخص شده چند نقطه گوشه دارد؟



۱) ۳

۲) ۱

۳) ۰

۴) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به شکل منطقه مشخص است که x_1 و x_2، آزاد در علامت هستند. پس در این حالت محور $x_1 > 0$ و محور $x_2 > 0$ عملاً تشکیل محدودیت نمی‌دهند، در نتیجه نمی‌تواند برخورد آن‌ها با محدودیت اصلی مسأله ایجاد نقطه گوشه نماید. به همین دلیل فرمول محاسبه تعداد نقاط گوشه موجه و غیرموجه فقط برای حالتی است که $x_1, x_2 \geq 0$ باشند.

۲- حالت خاص چندگانگی:

تعریف: در این حالت بی‌نهایت جواب بهینه وجود دارد که هر جواب مقدار بهینه یکسانی برای تابع هدف ارائه می‌کند.

شروط حالت خاص بهینه چندگانه:

الف) شرط لازم: تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌های مسأله باشد.

ب) شرط کافی: محدودیت فوق، یک محدودیت الزام‌آور باشد.

مثال: مقدار تابع هدف و حالت خاص مسأله‌ی زیر؟

$\max z = 2x_1 + 2x_2$

$x_1 + x_2 \le 4$

$2x_1 + x_2 \ge 2$

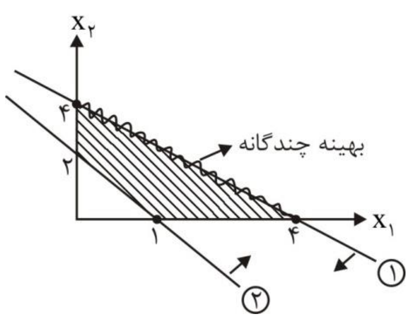
$x_1, x_2 \ge 0$

پاسخ:

راه‌حل اول: با توجه به این که محدودیت موازی تابع هدف است (شرط لازم) و این‌که علامت محدودیت اول به صورت $\le$ است و چون تابع هدف Max است و تابع Max محدودیت به صورت $\le$ مورد دلخواه آن است این محدودیت الزام‌آور بوده (شرط کافی) پس در نتیجه حالت خاص مسأله چندگانگی است.

راه‌حل دوم:

مدل را ترسیم کرده و داریم:



$z = 2$: در نقطه $(1,0)$

$z = 4$: در نقطه $(0,2)$

$z = 8$: در نقطه $(4,0)$

$z = 8$: در نقطه $(0,4)$

تذکر: این مدل دارای دو گوشه بهینه و بی‌شمار غیرگوشه بهینه می‌باشد.

مثال: حالت خاص مدل برنامه‌ریزی خطی زیر؟

$\max z = 2x_1 - 4x_2$

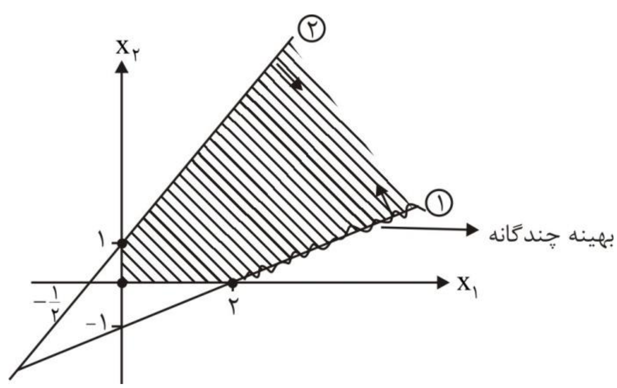
$x_1 - 2x_2 \le 2$

$-2x_1 + x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

پاسخ:

ابتدا مدل را ترسیم کرده و داریم:



$z = 0$: در نقطه $(0,0)$

$z = -4$: در نقطه $(0,1)$

$z^* = 4$: در نقطه $(2,0)$

با توجه به این‌که تابع هدف موازی محدودیت اول است (شرط لازم) و این محدودیت الزام‌آور است (شرط کافی) حالت خاص این مدل، بهینه چندگانه می‌باشد.

تذکر ۱: این مدل دارای یک گوشه بهینه و بی‌شمار غیرگوشه بهینه است.

تذکر ۲: هرگاه منطقه نامحدود و بهینه چندگانه را با هم داشته باشیم، مقدار تابع هدف قطعاً محدود است، اما مقدار متغیرهای تصمیم (x_1, x_2) می‌توانند نامحدود باشند.

نکته: چندگانگی یک حالت استثنا دارد و آن هم این است که منطقه موجه فقط یک نقطه باشد.

مثال: کدام گزینه صحیح است؟

$$\max z = 15x_1 + 12x_2$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 20$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

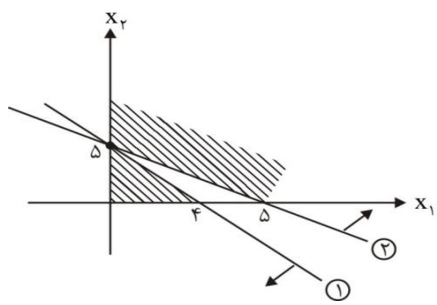
۱) مسأله بی‌نهایت جواب دارد. ۲) جواب بهینه، حالت چندگانه دارد.

۳) مسأله جواب ندارد. ۴) مسأله حالت خاص بتهگنی دارد.

پاسخ: گزینه (۴) صحیح است.

با توجه به این‌که تابع هدف موازی محدودیت اول است (شرط لازم) و این محدودیت، یک محدودیت الزام‌آور است (شرط کافی) به ظاهر حالت خاص بهینه چندگانه داریم ولی این‌طور نیست و این همان حالت خاص چندگانگی است که تقابل تبهگنی و چندگانگی است که در این صورت حالت خاص چندگانگی نخواهیم داشت و حالت خاص مسأله تبهگنی می‌باشد که با توجه به ترسیم زیر، داریم:

* با توجه به شکل زیر، منطقه موجه فقط یک نقطه است. پس در نتیجه در نقطه $(0,5)$ حالت خاص تبهگنی وجود دارد.



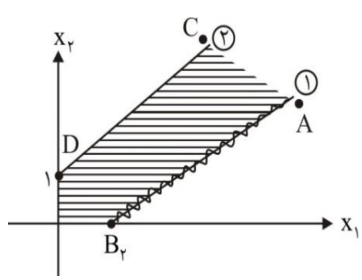
مثال: به ازاء چه مقدار C، مسأله جواب بهینه چندگانه دارد؟

$$\max z = 2x_1 - Cx_2$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۴ و ۱ ۴) ۰

پاسخ: گزینه (۲) صحیح است.

ابتدا مدل را ترسیم کرده و داریم:



$z = 4$: در نقطه B

$z = -C$: در نقطه D

اگر قرار باشد شرط بهینه چندگانه را بسازیم باید اول تابع هدف موازی محدودیت باشد که اگر $C=4$ محدودیت اول و اگر $C=1$ محدودیت دوم موازی می‌شود، از طرفی باید ببینیم کدام محدودیت الزام‌آور است چون می‌دانیم که تابع هدف بر روی هر کدام از محدودیت‌ها که چندگانگی را تشکیل دهد باعث می‌شود کل نقاط روی خط بهینه شده و مقدار تابع هدف مساوی داشته باشند پس کافی است که از روی خط شماره (۱) میان دو نقطه A و B مقدار تابع را در نقطه B حساب کنیم و از روی خط شماره (۲) مقدرا تابع در نقطه D را حساب کنیم. هر کدام از این دو نقطه به نمایندگی از این دو محدودیت که تابع هدف بیش‌تری داشته باشد، الزام‌آور است بر همین اساس خط (۱) الزام‌آور شده و مقدار C باید ۴ باشد.

نکته: چندگانگی $\xleftarrow{\%100}$ توازی تابع هدف با یکی از محدودیت‌ها.

توازی تابع هدف با یکی از محدودیت‌ها ⟵ چندگانگی

ممکن است ⟵ غیرچندگانگی

۳- منطقه موجه نامحدود:

برای تشخیص این‌که منطقه موجه یک مدل نامحدود است از دو طریق می‌توانیم پی بر این ببریم که منطقه موجه مدل نامحدود است یا نامحدود نیست.

الف) از طریق ترسیم

ب) از طریق حالت خاص زیر:

تابع هدف : $\mathrm{Max(min)}$

محدودیت‌ها $\begin{cases} AX \le + \\ x_j \ge 0 \end{cases}$

هرگاه در یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف max یا min و اعداد سمت راست مثبت، در تمام محدودیت‌ها، ضریب یک متغیر صفر یا منفی باشد، منطقه مدل دارای حالت خاص نامحدود می‌باشد.

مثال: حالت خاص مدل زیر کدام است؟

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$3x_1 - x_2 \le 4$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) چندگانه ۲) تبهگن ۳) منطقه نامحدود ۴) بدون جواب

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به نکته قبل، منطقه موجه به مسأله نامحدود می‌باشد.

نکته: اگر منطقه موجه نامحدود در راستای متغیری باشد که مقدار بی‌نهایت آن متغیر به درد تابع هدف بخورد در این صورت جواب مسأله نامحدود خواهد شد.

نکته: اگر منطقه موجه نامحدود در راستای متغیری باشد که مقدار بی‌نهایت آن متغیر به درد تابع هدف نمی‌خورد، در این صورت جواب مسأله، محدود خواهد شد.

مثال: جواب مسأله‌های زیر کدام است؟

$$\max z = x_1 - x_2$$
$$3x_1 - x_2 \le 4$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

پاسخ:

با توجه به این که منطقه موجه نامحدود در راستای x_2 می‌باشد $(x_2 \to +\infty)$ و این‌که ضریب این متغیر (x_2) در سطر تابع هدف منفی است مقدار بی‌نهایت این متغیر به درد تابع هدف max نمی‌خورد و جواب مسأله محدود خواهد شد. $\left(z^* = \frac{4}{3}\right)$

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$3x_1 - x_2 \le 4$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

پاسخ:

با توجه به این که منطقه موجه نامحدود در راستای x_2 می‌باشد $(x_2 \to +\infty)$ و این‌که ضریب این متغیر (x_2) در سطر تابع هدف مثبت است مقدار بی‌نهایت این متغیر به درد تابع هدف max می‌خورد و جواب مسأله محدود ناخواهد شد. $\left(z^* = +\infty\right)$

تذکر: هرگاه حالت نامحدود در یک راستا باشد از همان نکته که ضریب متغیر در محدودیت صفر یا منفی باشد قابل تشخیص است ولی اگر مسأله در هردو جهت به سمت بی‌نهایت میل کند، غیرقابل تشخیص می‌باشد.

۴- حالت بدون جواب (بدون منطقه موجه):

در این حالت فقط با محدودیت‌ها کار داریم که اگر بین محدودیت‌های مسأله هیچ اشتراکی وجود نداشته باشد یا محدودیت‌ها همدیگر را نقض کنند، حالت خاص بدون جواب رخ می‌دهد.

مثال: مقدار تابع هدف مسأله روبه‌رو کدام گزینه است؟

$$\max z = 4x_1 + 6x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) صفر ۴) بدون جواب

پاسخ: گزینه (۴) صحیح است.

با توجه به محدودیت سوم و فرض $x_1, x_2 \ge 0$ مشخص است که مقدار متغیرهای x_1 و x_2 برابر مقدار صفر بوده که در این صورت مقدار تابع هدف مسأله برابر صفر بوده و گزینه (۳) صحیح می‌شد ولی این در صورتی است که مقدار $x_1 = x_2 = 0$ در تمام محدودیت‌های مسأله صدق کند که در این مسأله مقدار صفر در محدودیت دوم مسأله صدق نکرده و مسأله جواب ندارد.

مثال: حالت خاص مسأله روبه‌رو؟

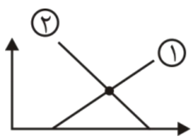
$$\max z = 6x_1 + 9x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$3x_1 - x_2 \le 8$$
$$6x_1 - 2x_2 \ge 18$$

پاسخ:

مسأله روبه‌رو حالت خاص بدون جواب دارد اگر محدودیت سوم مسأله را بر عدد ۲ تقسیم کنیم داریم $3x_1 - x_2 \ge 9$ که این محدودیت دوم را نقض می‌کند.

۴- تابع هدف

تذکر: اگر تابع هدف از max به min تغییر پیدا کند، در دو حالت زیر مقدار بهینه تابع هدف تغییر پیدا نمی‌کند:



۱) منطقه فقط یک نقطه باشد.

* محدودیت‌های (۱) و (۲) به صورت مساوی هستند.

۲) منطقه یک پاره‌خط است که این خط حالت خاص بهینه چندگانه را دارد.

$$\max z \text{ یا } \min z = 4x_1 + 2x_2$$
$$x_1 \le 2$$
$$2x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$