مبحث تحلیل حساسیت :

جهت شرکت در جلسه اول دوره عالی زمستان، ابتدا فصل تحلیل حساسیت و روابط ماتریسی را از کتاب جامع تحقیق در عملیات (مولف : مسعود یگانه / انتشارات راهیان ارشد) و یا یکی از کتابهای کنکور (مانند کتاب خانم دکتر فدوی) مطالعه کنید و سپس ۳۶ سوال زیر را بطور دقیق بررسی و با توجه به پاسخ نامه تحلیل کنید ...

مسعود یگانه

«روابط ماتریسی و تحلیل حساسیت»

۱. کدام گزینه جدول بهینه را بهتر توصیف می‌کند؟

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 4x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 60$$
$$x_1 + x_2 \le 24$$
$$x_1 + 2x_3 \le 30$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
z							
x_1		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$			
S_2		$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$			
S_3		$\frac{-2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$			

۱) فقط منبع S_1 کامل مصرف می‌شود و ۲۰ واحد x_1 تولید می‌شود.
۲) فقط منبع S_1 کامل مصرف می‌شود و ۲۰ واحد x_2 تولید می‌شود.
۳) منابع S_1 و S_2 کامل مصرف می‌شوند و ۲۰ واحد x_2 تولید می‌شود.
۴) منابع S_1 و S_2 کامل مصرف می‌شوند و از منبع S_3 ده واحد باقی می‌ماند و ۲۰ واحد x_1 تولید می‌شود.

۲. اگر در مدل زیر تمامی ۴۰ واحد منبع اول و ۱۰ واحد منبع دوم مصرف شود، مقدار تابع هدف کدام است؟

$$\max z = C_1x_1 + C_2x_2$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le 30$$
$$x_j \ge 0$$

	S_1	S_2	
z	۰/۲		

۱) ۸
۲) ۱۸
۳) ۵۰
۴) ۲۸

۳. در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر، جدول بهینه به‌صورت زیر است:

$$\max z = C_1x_1 + C_2x_2$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + S_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + S_2 = b_2$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	
z	۰	۰	۲	۳	$\frac{5}{2}$
x_1	۱	۰	۳	۲	$\frac{5}{2}$
x_2	۰	۱	۱	۱	۱

مقدار $(a_{11} + a_{21} + a_{12})$ کدام است؟

۱) ۲-　　　۲) ۱-
۳) ۰　　　۴) ۱+

۴. برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید. اگر بدانیم ماتریس پایه بهینه $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است، قیمت‌های سایه محدودیت‌ها عبارتند از:

$$\max z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 460$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

۱) $y_1 = \frac{1}{3}\,,\ y_2 = \frac{7}{3}$　　　۲) $y_1 = 3\,,\ y_2 = 5$
۳) $y_1 = \frac{2}{3}\,,\ y_2 = \frac{-1}{3}$　　　۴) $y_1 = 2\,,\ y_2 = 1$

*** با توجه به مدل و جدول سیمپلکس زیر به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:**

$$\max z = C_1x_1 + 10x_2$$
$$a_{11}x_1 + 4x_2 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + 5x_2 \le b_2$$
$$x_j \ge 0$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	
z	۰		۴		۱۲۰
x_1			$\frac{1}{5}$		
S_2			$\frac{-2}{5}$		۱

۵. ارزش هر واحد محصول اول چقدر است؟

۱) ۱۰　　　۲) ۳۰
۳) ۲۰　　　۴) ۴۰

۶. اگر از منبع دوم ۱۲ واحد استفاده شده باشد، میزان منبع اول چقدر است؟

۱) ۲۵　　　۲) ۱۴
۳) ۳۰　　　۴) ۱۳

۷. کدام گزینه درست است؟

۱) میزان سود در بیش‌ترین حالت کاهش سود محصول $x_۱$ به شرط آن‌که بهینگی جدول به هم نخورد **۷۵** است.

۲) افزایش سود محصول دوم تا **۵** واحد باعث بهبود مقدار تابع هدف خواهد شد.

۳) میزان منبع اول تا **۲۵** واحد کاهش مجاز است و به‌ازای آن جدول موجه بودن خود را حفظ می‌کند.

۴) گزینه‌های ۱ و ۳

۸. مقادیر قیمت سایه در جدول نهایی را بیان کنید؟

$$\max z = ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳$$
$$۲x_۱ - x_۲ + x_۳ \le ۲۰$$
$$x_۱ - ۲x_۲ + ۲x_۳ \le ۱۸$$
$$x_۱ + x_۳ \le ۱۴$$
$$x_j \ge ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
z							
$x_۱$				۰		۱	
$S_۲$				−۲		۳	
$x_۲$				−۱		۲	

۱) $(۴, ۰, -۱۳)$

۲) $(-۳, ۰, ۱۱)$

۳) $(-۴, ۰, ۱۳)$

۴) $(۳, ۰, -۱)$

۹. با توجه به جدول زیر، مقدار $\frac{\Delta z}{\Delta b_۱}$ کدام گزینه است؟

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
z	۰	۰	۲	۴	۰	۱۶
$x_۱$						۸
$x_۲$						۳
$S_۳$						۵

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۸

۱۰. درصورتی‌که محدودیت اول ثانویه به‌صورت $y_۱ + y_۲ \ge ۱$ باشد، $x_۱$ در سطر صفر جدول نهایی چقدر است؟

$$\max z = C_۱ x_۱ + ۴x_۲$$

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
z			$(y_۱$	$۰)$	
$x_۲$			۲		
$S_۲$					

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۵

۱۱. مسأله زیر را درنظر بگیرید (یک پایه آن داده شده است)

$$\max z = ۲x_۱ + x_۲ + x_۳$$
$$x_۱ + x_۳ \le ۱$$
$$x_۲ + x_۳ \le ۲$$
$$x_۱ + x_۲ \le ۳$$
$$x_j \ge ۰$$

$$B^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}^{۱} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \end{pmatrix}$$

۱) پایه B یک پایه بهینه است.

۲) پایه B یک پایه نشدنی است.

۳) پایه B بهینه نمی‌باشد و S_1 واردشونده است.

۴) پایه B بهینه نمی‌باشد و S_2 واردشونده است.

۱۲. جدول بهینه یک مسأله با تابع هدف ماکزیمم‌سازی به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	
z	۰	۱	۷	۳	۰	M	۵۴
S_2	۰	۱	۲	۱	۱	-۱	۱۳
x_1	۱	۲	۳	۱	۰	۰	۱۸

اگر از مقدار سمت راست هریک از محدودیت‌های مسأله، ۳ واحد کاسته شود، مقدار تابع هدف .... می‌یابد.

۱) ۹ واحد کاهش
۲) ۱۵ واحد افزایش
۳) ۶ واحد افزایش
۴) ۱۸ واحد کاهش

۱۳. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را به همراه جدول نهایی آن درنظر بگیرید. افزایش هم‌زمان مقادیر سمت راست محدودیت‌ها به اندازه ۵ واحد چه تأثیری بر مقدار بهینه تابع هدف دارد؟

$$\max z = 6x_1 + 8x_2$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_j \ge 0$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	
z	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	
	۱	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{2}$
	۰	۱	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{4}$

۱) تابع هدف را ۲۰ واحد زیاد می‌کند.
۲) تابع هدف را ۲۵ واحد زیاد می‌کند.
۳) تأثیری بر مقدار بهینه تابع هدف ندارد.
۴) تابع هدف را ۴۵ واحد افزایش می‌دهد.

۱۴. درصورتی‌که ضرایب متغیرهای تصمیم در سطر تابع هدف به‌ترتیب ۱ و ۲ و ۳ واحد اضافه شوند، کدام گزینه نادرست است؟

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$
$$\frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \ge \frac{1}{2}$$
$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 1$$

	x_1	x_2	x_3	R_1	S_2	R_2	S_3	
z	۰	۵	۰	۲+M	۰	M	۱	۸
x_1	۱	-۱	۰	۱	۰	۰	-۱	۱
x_3	۰	۲	۱	۰	۰	۰	۱	۲
S_2	۰	۳	۰	۱	۱	-۱	۰	۲

۱) هم‌چنان خرید منبع دوم اقتصادی نمی‌باشد.

۲) درصورتی‌که قیمت خرید منبع سوم ۲ واحد پولی باشد، خرید منبع باصرفه است.

۳) خرید منبع اول با هزینه تمام شده ۲ واحد صرفه اقتصادی دارد.

۴) خرید منبع دوم با ؟؟؟ هزینه اقتصادی می‌باشد.

۱۵. جدول نهایی زیر مفروض است. اگر یک متغیر جدید x_3 به مدل اضافه شود و ضریب آن در تابع هدف ۱۰ و میزان مصرف این محصول جدید از منابع تولید به‌ترتیب ۲ و ۲ باشد، در مقدار z چه تغییری حاصل می‌شود؟

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	۴۵
x_1	۱	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_2	۰	۱	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{4}$

۱) به اندازه ۲، برای تولید هر واحد x_3 کاهش می‌یابد.
۲) به اندازه ۱۰، برای تولید هر واحد x_3 اضافه می‌شود.
۳) به اندازه ۲، برای تولید هر واحد x_3 اضافه می‌شود.
۴) تغییری حاصل نمی‌شود.

۱۶. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید. اگر در جواب بهینه x_1 و x_2 در پایه باشند، سود حاصل چهارم حداقل چقدر افزایش یابد تا تولید آن اقتصادی شود؟

$$\max z = 50x_1 + 69x_2 + 17x_3 + 36x_4$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 9x_4 \le 25$$
$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 4x_4 \le 26$$
$$x_j \ge 0$$

۱) ۳۳
۲) ۷۳
۳) ۱/۹
۴) ۴/۷

۱۷. جدول بهینه یک م سأله برنامه‌ریزی خطی max به صورت زیر ا ست. اگر محدودیت $x_1 + x_2 + x_4 \le 3$ ا ضافه شود، مقدار بهینه تابع هدف:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	۲	۰	۰	۱	۲۰
x_2	۱	۱	۰	۲	۵
x_3	۲	۰	۱	۰	۲

۱) تغییری نمی‌کند.
۲) برابر ۲۳ خواهد بود.
۳) برابر ۲۲ خواهد بود.
۴) برابر ۱۸ خواهد بود.

۱۸. برنامه‌ریزی خطی زیر به‌منظور تعیین میزان تولید چهار محصـــول در جهت حداکثر نمودن ســـود می‌باشـــد. اگر متغیرهای پایه‌ای در تابلو بهینه سیمپلکس به‌ترتیب x_1 و x_2 با شند، سود محصول سوم چقدر افزایش یابد تا تولید آن صرفه اقتصادی داشته باشد؟

$$\max z = 45x_1 + 27x_2 + 18x_3 + 36x_4$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 30$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 30$$
$$x_j \ge 0$$

۱) حداقل ۳ واحد افزایش یابد.
۲) حداقل ۴ واحد افزایش یابد.
۳) حداقل ۹ واحد افزایش یابد.
۴) حداقل ۱۸ واحد افزایش یابد.

۱۹. یک شــرکت تولیدی برای تولید ۳ نوع لاســتیک ماشــین از ۳ ماده اولیه کربن با خلوص %۴۰، %۵۸ و %۶۳ استفاده می‌کند. جدول بهینه مدل این مسأله به‌صورت زیر است:

$$\max z = ۵x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳$$
$$۲x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ \geq ۲$$
$$۳x_۱ - ۴x_۲ \leq ۳$$
$$x_۲ + ۳x_۳ \leq ۵$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$R_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
z	۰	۰	۱۱	۰	M	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱۴}{۳}$	$\frac{۸۵}{۳}$
$x_۱$	۱	۰	۴	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۲۳}{۳}$
$S_۱$	۰	۰	۱۵	۱	−۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱۴}{۳}$	$\frac{۷۰}{۳}$
$x_۲$	۰	۱	۳	۰	۰	۰	۱	۵

اگر حداقل درصد میزان موردنیاز کربن با خلوص %۴۰، ۵ واحد شود:

۱) مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد.

۲) متغیر $x_۳$ وارد پایه شده و $x_۱$ خارج می‌شود.

۳) مقدار تابع هدف تغییری نمی‌کند.

۴) گزینه ۲ و ۳

۲۰. با توجه به سؤال قبل، اگر ضریب متغیر $x_۳$ در محدودیت دوم ۷ واحد کم شود ....

۱) مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد.

۲) مقدار تابع هدف نامحدود می‌شود.

۳) متغیر $x_۳$ وارد پایه شده و $x_۲$ خارج می‌شود.

۴) مسأله ناموجه می‌شود.

*** با توجه به اطلاعات زیر، به سؤالات ۲۱ و ۲۲ پاسخ دهید:**

تابلوی بهینه سیمپلکس یک مدل برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است:

$$\max z = ۲x_۱ + x_۲ + \frac{۱}{۴}x_۳$$
$$۴x_۱ + ۶x_۲ + ۳x_۳ \le ۸$$
$$۳x_۱ - ۶x_۲ - ۴x_۳ \le ۱$$
$$۲x_۱ + ۳x_۲ - ۵x_۳ \ge ۴$$
$$x_j \ge ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$R_۳$	
z	۰	۰	$\frac{۵}{۸۴}$	$\frac{۵}{۱۴}$	$\frac{۴}{۲۱}$	۰	۰	$\frac{۶۴}{۲۱}$
$S_۳$	۰	۰	$\frac{۱۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۱-	۰
$x_۱$	۱	۰	$\frac{-۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	۰	۰	$\frac{۹}{۷}$
$x_۲$	۰	۱	$\frac{۲۵}{۴۲}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{-۲}{۲۱}$	۰	۰	$\frac{۱۰}{۲۱}$

۲۱. اگر مقدار سمت راست محدودیت اول نصف شود، ....

۱) $x_۳$ وارد پایه می‌شود.
۲) محدودیت اول غیرالزام‌آور می‌شود.
۳) مسأله امکان‌ناپذیر می‌شود.
۴) مسأله حالت خاص بهینه چندگانه خواهد داشت.

۲۲. اگر ضریب متغیر $x_۱$ در سطر تابع هدف ۳ واحد افزایش یابد، ....

۱) مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد.
۲) متغیر $x_۳$ وارد پایه می‌شود و $x_۲$ خارج می‌شود.
۳) مسأله ناموجه می‌شود.
۴) متغیر $x_۳$ وارد پایه می‌شود و $S_۳$ خارج می‌شود.

۲۳. جدول و حل بهینه به‌صورت زیر است. مقدار منبع اول تا چه میزان می‌تواند افزایش پیدا کند به‌طوری‌که جواب هنوز موجه باقی بماند؟

$$\max z = ۲۰x_۱ + ۱۰x_۲$$
$$۵x_۱ + ۴x_۲ \le ۳۰$$
$$۲x_۱ + ۵x_۲ \le ۱۳$$
$$x_j \ge ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۰	۶	۴	۰	۱۲۰
$x_۱$	۱	$\frac{۴}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	۶
$S_۲$	۰	$\frac{۱۷}{۵}$	$\frac{-۲}{۵}$	۱	۱

۱) ۱
۲) ۶
۳) ۴
۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۴. در جدول نهایی مدل برنامه‌ریزی خطی زیر، متغیرهای پایه‌ای عبارتند از $[S_۲, x_۳, x_۱]$. اگر محدودیت جدیدی به شکل $۵x_۱ + ۷x_۲ - x_۳ \ge ۴$ به مسأله اضافه کنیم، جواب بهینه چه تغییری می‌کند؟

$$\begin{aligned} \max\ & C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 64 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

۱) تغییری نمی‌کند.
۲) بیش‌تر می‌شود.
۳) کم‌تر می‌شود یا تغییری نمی‌کند.
۴) کم‌تر می‌شود.

۲۵. مسأله برنامه‌ریزی خطی و جدول نهایی آن را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max z = & 6x_1 + 8x_2 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	
z	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	
	۱	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{2}$
	۰	۱	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{4}$

اضافه شدن محدودیت جدید $2x_1 + 4x_2 \leq 20$ چه حالت خاصی را دربردارد؟

۱) نشدنی شدن مسأله
۲) تبهگن
۳) بهینه چندگانه
۴) جواب نامحدود

۲۶. با توجه به سؤال قبل، اضافه شدن یک متغیر جدید به مسأله ثانویه با ضریب تابع هدف ۳۰ و ضرایب آن‌ها در محدودیت‌های ثانویه به‌ترتیب برابر ۱ و ۲، چه اثری دارد؟

۱) مسأله نشدنی می‌شود.
۲) مقدار تابع هدف جدید مسأله اولیه زیاد می‌شود.
۳) مقدار تابع هدف جدید مسأله اولیه کاهش می‌یابد.
۴) مقدار تابع هدف تغییری نمی‌کند.

۲۷. جدول نهایی زیر را داریم، در این صورت اگر مقدار سمت راست اولین محدودیت اصلی ۲ واحد زیاد شود، مقدار بهینه x_2 چه تغییری خواهد کرد؟

	x_1	S_1	S_2	
z	۳	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	۱۵
x_3	-۱	۱	$\frac{-1}{2}$	۱
x_2	۲	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۲

۱) ۱ واحد کم می‌شود.
۲) ۱ واحد زیاد می‌شود.
۳) ۲ واحد زیاد می‌شود.
۴) تغییر نمی‌کند.

۲۸. در سؤال قبل اگر ضریب متغیر $x_۱$ را در تابع هدف بخواهیم تغییر دهیم تا جدول ارائه شده بهینه نبوده و $x_۱$ بتواند وارد پایه شود، در این صورت حداقل مقدار تغییر چقدر باید باشد؟

۱) بیش‌تر از **۳** واحد افزایش
۲) بیش‌تر از **۱** واحد افزایش
۳) کم‌تر از **۳** واحد کاهش
۴) کم‌تر از **۱** واحد کاهش

۲۹. برنامه‌ریزی تولید سه محصول به کمک دو ماده خام به‌منظور حداکثر نمودن سود را درنظر بگیرید. اگر سود هر واحد محصول اول به جای ۶ به ۴ تغییر کند:

$$\max z = ۶x_۱ + ۸x_۲ + ۵x_۳$$
$$۲x_۱ + ۵x_۲ + x_۳ \le ۴۰$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ \le ۵۰$$
$$x_j \ge ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۰	۵	۰	۱	۲	۱۴۰
$x_۱$	۱	۳	۰	۱	$\frac{-۱}{۲}$	۱۵
$x_۳$	۰	-۱	۱	-۱	۱	۱۰

۱) جواب فعلی بهینه باقی می‌ماند.
۲) تولید محصول اول قطع و به جای آن محصول دوم تولید می‌شود.
۳) تولید محصول سوم قطع و به جای آن محصول دوم تولید می‌شود.
۴) تولید محصول اول قطع و مقداری از مواد خام اضافه می‌ماند.

۳۰. برنامه‌ریزی خطی زیر به‌منظور تعیین میزان تولید ۴ محصول در جهت حداکثر نمودن سود است.

$$\max z = ۴۵x_۱ + ۲۷x_۲ + ۱۸x_۳ + ۳۶x_۴$$
$$۵x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۸x_۴ = ۳۰$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ = ۳۰$$

اگر متغیرهای پایه‌ای در تابلو بهینه به‌ترتیب $x_۴$ و $x_۲$ باشند، سود محصول سوم چقدر افزایش یابد تا تولید آن صرفه اقتصادی داشته باشد؟

۱) حداقل **۱۸** واحد افزایش یابد.
۲) حداقل **۴** واحد افزایش یابد.
۳) حداقل **۳** واحد افزایش یابد.
۴) حداقل **۹** واحد افزایش یابد.

۳۱. جدول نهایی زیر داده شده است. دامنه‌ی تغییرات $C_۲$ را برای بهینه ماندن جدول زیر تعیین کنید.

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۴		۲		۵	
$x_۲$	۲		۲		۱	۷۰
$S_۱$	۳		۲		۲	۸۰

۱) $\Delta_۲ \ge -۲$
۲) $-۵ \le \Delta_۲ \le -۲$
۳) $-۲ \le \Delta_۲ \le -۱$
۴) $\Delta_۲ \ge -۱$

۳۲. مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$$\max z = ۵x_1 + ۱۲x_2 + ۴x_3$$
$$x_1 + ۲x_2 + x_3 \le ۵۰$$
$$۲x_1 - x_2 + ۳x_3 = ۲۰$$
$$x_j \ge ۰$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	R_2	
z	۰	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۲۹}{۵}$	$M-\frac{۲}{۵}$	۲۸۲
x_2	۰	۱	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۱۶
x_1	۱	۰	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۸

برای افزایش سود، بهتر است کدام منبع و به چه مقدار افزایش یابد؟

۱) اول، حداکثر ۳۰ واحد
۲) دوم، حداقل ۱۰ واحد
۳) اول، حداکثر تا بی‌نهایت
۴) اول، حداکثر تا ۱۷ واحد

۳۳. در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی ماکزیمم‌سازی پایه بهینه $B = \lfloor a_1, a_3, a_4 \rfloor$ و $B^{-1} = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$ و $C_B = (۱,۲,۳)$. محدودیت دوم مسأله ثانویه $y_1 + ۲y_2 - y_3 \ge ۷$ است. اگر بردار ضرایب متغیر x_2 در محدودیت‌ها به $a'_2 = \begin{vmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$ تغییر کند، کدام گزینه درست است؟

۱) متغیر x_2 وارد پایه می‌شود و متغیر x_3 از پایه خارج می‌شود.
۲) متغیر x_2 وارد پایه می‌شود و متغیر x_1 از پایه خارج می‌شود.
۳) متغیر x_2 وارد پایه می‌شود و متغیر x_1 یا x_3 از پایه خارج می‌شود.
۴) پایه بهینه تغییری نمی‌کند.

۳۴. مدل و جدول بهینه برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\max z = ۴x_1 + ۶x_2 + ۲x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le ۳$$
$$x_1 + ۴x_2 + ۷x_3 \le ۹$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
z	۰	۰	۶	$\frac{۱۰}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۱۶
x_1	۱	۰	−۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{-۱}{۳}$	۱
x_2	۰	۱	۲	$\frac{-۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۲

فرض کنید سمت را ست محدودیت‌ها به شرح زیر تغییر کند، دامنه تغییرات در چه بازه‌ای با شد که جدول موجه باقی بماند؟

$$\begin{cases} b_1 \to ۳ + ۳\theta \\ b_2 \to ۹ - ۳\theta \end{cases}$$

۱) $\theta \ge \frac{-۱}{۵}$
۲) $\theta \le ۲$
۳) $\frac{-۱}{۵} \le \theta \le ۱$
۴) $\theta \le \frac{-۱}{۵}$

۳۵. برنامه‌ریزی پارامتریک زیر را درنظر بگیرید، نقاط شکست تابع $z(\theta)$ کدام است؟ $(۰ \le \theta \le ۱۰)$

$$\max z(\theta) = (۸+\theta)x_۱ + (۲۴-۲\theta)x_۲$$
$$x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰$$
$$۲x_۱ + x_۲ \le ۱۰$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

۱) $\theta = ۲ \,,\, \theta = ۸$
۲) $\theta = ۲ \,,\, \theta = ۴$
۳) $\theta = ۴ \,,\, \theta = ۸$
۴) $\theta = ۶ \,,\, \theta = ۸$

۳۶. نقطه شکست تابع هدف برنامه‌ریزی پارامتری، با درنظر گرفتن جدول بهینه زیر کدام است؟ $(\theta \ge ۰)$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
z	θ	$۴-۳\theta$	۰	۲	۰	۴	$۱۳۵+۴\theta$
$x_۳$	۰		۱		۰		
$S_۲$	۰		۰		۰		
$x_۱$	۱	۱	۰	-۲	۱	-۱	

۱) $\theta = \frac{۴}{۳}$
۲) $\theta = ۱$
۳) $\theta = ۰$
۴) $\theta = \frac{۳}{۴}$

پاسخ‌نامه «روابط ماتریسی و تحلیل حساسیت»

۱. گزینه «۱»

آن‌گونه که در مبحث سیمپلکس بیان شد، مقدار متغیرهای کمکی، میزان باقی‌مانده منبع را نشان می‌دهند. متغیر $S_۱$ غیراساسی است، پس مقدار آن صفر است و بدین معنی است که کامل مصرف شده است. اما مقدار متغیرهای $S_۲$ و $S_۳$ در جدول مشخص نشده است، که می‌توانیم با استفاده از روابط ماتریسی آن را به‌دست آوریم، که در این صورت مقدار اعداد سمت راست از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید:

$$b_i' = B^{-۱}b_i$$

$$b_i' = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ \frac{-۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{-۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۶۰ \\ ۲۴ \\ ۳۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲۰ \\ ۴ \\ ۱۰ \end{pmatrix}$$

که با توجه به جدول و ترتیب متغیرهای ا سا سی م شخص می شود که $x_۱ = ۲۰$، $S_۲ = ۴$ و $S_۳ = ۱۰$ می‌با شد، پس ۴ واحد از منبع دوم و ۱۰ واحد از منبع سوم باقی می‌ماند و ۲۰ واحد $x_۱$ تولید می‌شود.

۲. گزینه «۱»

از آن‌جا که مطرح شده تمامی ۴۰ واحد منبع اول مصرف می‌شود، پس نتیجه می‌شود که $b_۱ = ۴۰$ و $S_۱ = ۰$ و چون تنها ۱۰ واحد از منبع دوم مصرف می‌شود پس ۲۰ واحد از منبع دوم باقی می‌ماند که یعنی $S_۲$ در پایه با مقدار ۲۰ خواهد بود. حال با توجه به این‌که مقادیر y و b_i مشخص است، می‌توانیم مقدار تابع هدف را با استفاده از رابطه ماتریسی زیر به‌دست آوریم:

	$S_۱$	$S_۲$	
	۰/۲	۰	
		۰	
$S_۲$		۱	۲۰

$$z = y_i b_i = \begin{pmatrix} ۰/۲ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۴۰ \\ ۳۰ \end{pmatrix} = ۸$$

* اگر دقت کنید این سؤال را می‌توان با استفاده از مسأله ثانویه نیز حل کرد، بدین‌صورت که تابع هدف ثانویه z و مقادیر y ها مشخص است، پس مقدار آن عبارتست از:

$$\begin{aligned} \min w &= ۴۰y_۱ + ۳۰y_۲ \\ &= ۴۰(۰/۲) + ۳۰(۰) = ۸ \end{aligned}$$

۳. گزینه «۱»

دقت کنیم که $B^{-۱}$ معکوس ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیت‌هاست. (در این سؤال به‌ترتیب $x_۱$ و $x_۲$) پس اگر دوباره از $B^{-۱}$ معکوس بگیریم و به B برسیم، عملاً توانسته‌ایم به ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها دست پیدا کنیم:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}\rightarrow\left(B^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}۱ & -۲\\ -۱ & ۳\end{pmatrix}}{۳-۲}=\begin{pmatrix}۱ & -۲\\ -۱ & ۳\end{pmatrix}$$

ضرایب $x_۱$ در محدودیت‌ها: $a_{۱۱}=۱ / a_{۲۱}=-۱$

ضرایب $x_۲$ در محدودیت‌ها: $a_{۱۲}=-۲ / a_{۲۲}=۳$

$$a_{۱۱}+a_{۲۱}+a_{۱۲}=۱+(-۱)+(-۲)=-۲$$

۴. گزینه «۱»

می‌دانیم که ماتریس B، ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیت‌هاست، پس با داشتن ماتریس B ؟؟؟ مشخص کنیم، پس متغیرهای اساسی در این پایه عبارتند از: $x_۲$, $x_۳$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix} \quad\Rightarrow$$ **$x_۲$ و $x_۳$ اساسی هستند.**

ضرایب $x_۲$ در محدودیت‌ها

ضرایب $x_۳$ در محدودیت‌ها

برای به‌دست آوردن قیمت‌های سایه به B^{-1} نیز نیاز داریم که با معکوس کردن B به‌دست می‌آید:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۲\end{pmatrix}}{۴-۱}=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\end{pmatrix}$$

رابطه قیمت‌های سایه $y=C_BB^{-1}$ می‌باشد که در این رابطه C_B ضریب متغیرهای اساسی در تابع هدف می‌باشد که با استفاده از ماتریس B متوجه شدیم که $x_۲$ و $x_۳$ در پایه هستند، پس قیمت‌های سایه مطابق روبه‌رو خواهند بود:

$$y=C_BB^{-1}=\begin{pmatrix}۳ & ۵\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۷}{۳}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad y_۱=\frac{۱}{۳}\,,\ y_۲=\frac{۷}{۳}$$

۵. گزینه «۳»

ارزش هر واحد محصول همان ضریبش در تابع هدف (C) می‌باشد. در روابط ماتریسی، رابطه‌ای که در آن ضریب متغیر در تابع هدف به‌کار رفته باشد، رابطه ارزش منابع $\left(y=C_BB^{-1}\right)$ می‌باشد که در آن C_B ضریب متغیرهای اساسی در تابع هدف است و $x_۱$ نیز در این سؤال اساسی است. همچنین مقدار $y_۲$ نیز برابر صفر است (چون $S_۲$ اساسی است)، پس خواهیم داشت:

$$y=C_BB^{-1}=\begin{pmatrix}C_۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{۱}{۵} & ۰\\ \frac{-۲}{۵} & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{C_۱}{۵} & ۰\end{pmatrix}$$

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۰		۴	۰	۱۲۰
$x_۱$			$\frac{۱}{۵}$	۰	
$S_۲$			$\frac{-۲}{۵}$	۱	۱

با توجه به جدول و رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\frac{C_1}{5} = 4 \Rightarrow C_1 = 20$$

۶. گزینه «۳»

در جدول مقدار تابع هدف داده شده که برابر با ۱۲۰ است و ارزش منابع هم داده شده است، پس می‌توان با استفاده از رابطه مقدار تابع هدف، میزان منبع اول (b_1) را به شکل زیر به‌دست آورد:

$$z = y_i b_i = (4 \quad 0)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 4b_1 \quad \Rightarrow 4b_1 = 120$$
$$b_1 = 30$$

۷. گزینه «۴»

هر گزینه را تحلیل کرده و درستی آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه اول: منظور از حالت کاهش سود محصول x_1 به شرط آن‌که بهینگی جدول به هم نخورد، همان بازه مجاز C_1 است. یکی از روش‌های محاسبه دامنه مجاز این است که شیب تابع هدف مسأله را با مجهول قرار دادن ضریب موردنظر برابر با شیب محدودیت‌های الزام‌آور مسأله قرار دهیم. در این مسأله $S_1 = 0$ و $S_2 > 0$ می‌باشد، پس نقطه بهینه روی محدودیت اول است، در نتیجه محدودیت اول الزام‌آور است که در آن a_{11} را باید به‌دست آوریم و با توجه به این‌که x_1 اساسی است و ستون آن در جدول نهایی یکه است، می‌توانیم از رابطه زیر a_{11} را پیدا کنیم:

$$P'_{x_1} = B^{-1}P_{x_1} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad 1 = \frac{1}{5}a_{11} + 0 \Rightarrow a_{11} = 5$$

پس دامنه مجاز C_1 خواهد بود:

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$
$$5x_1 + 4x_2 \le 30 \to \frac{C_1}{5} = \frac{10}{4} \Rightarrow C_1 = 12/5 \Rightarrow C_1 > 12/5$$

حال از آن‌جا که میزان سود مطرح شده، پس باید سود را در حالت $C_1 = 12/5$ به‌دست آوریم، مقدار x_1 در جدول نهایی را از رابطه b'_i می‌توان یافت:

$$b'_i = B^{-1}b_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 + b_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \to b'_1 \\ \to b'_2 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = b'_1 = 6$$

$$z = 12/5x_1 + 10x_2 = 12/5(6) + 10(0) = 75 \quad \Rightarrow$$ گزینه اول صحیح است.

گزینه دوم: در صورتی می‌توانیم بگوییم تغییر ضریب x_2 باعث بهبود مقدار تابع هدف می شود که این تغییر باعث شود در جدول نهایی متغیر x_2 ورودی شود، در نتیجه جدول ادامه پیدا کرده و مقدار تابع بهبود می یابد. پس می‌توانیم $z_j - C_j$ را برای متغیر x_2 در جدول نهایی به‌دست آوریم تا ببینیم چه وضعیتی دارد:

	x_1	x_2	S_1	S_2
z	۰	?	۴	۰
x_1	۱		$\frac{1}{5}$	۰
S_2	۰		$\frac{-2}{5}$	۱

$$z_j - C_j = -C_j + C_B B^{-1} P_x = -C_j + yP_x$$

$$z_2 - C_2 = -10 + \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -10 + 16 = 6$$

$$\left(z_j - C_j\right)_{\text{جدید}} = \left(z_j - C_j\right)_{\text{فعلی}} - \Delta C_j$$

$$\left(z_2 - C_2\right)_{\text{جدید}} = 6 - (+5) = +1 \rightarrow$$ پس جدول هم‌چنان بهینه باقی می‌ماند و x_2 ورودی نشده و مقدار تابع هدف بهبود نمی‌یابد.

گزینه سوم: یک روش سریع و آسان برای محاسبه دامنه مجاز اعداد سمت راست، بدین‌صورت است که ستون سمت راست جدول نهایی را (b'_i) بر P'_{S_i} تقسیم می‌کنیم و کوچک‌ترین نسبت مثبت قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان کاهش b_i را مشخص می‌کند و هم‌چنین کوچک‌ترین نسبت منفی (از نظر قدرمطلق)، قرینه شده و بزرگ‌ترین افزایش b_i را نشان می‌دهد. در نتیجه خواهیم داشت:

	x_1	x_2	S_1	S_2	
z					
x_1			$\frac{1}{5}$		۶
S_2			$\frac{-2}{5}$		۱

$$\frac{6}{\frac{1}{5}} = 30 \xrightarrow{\text{قرینه}} -30$$

$$\frac{1}{\frac{-2}{5}} = \frac{-5}{2} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{+5}{2}$$

$$-30 < \Delta b_1 < \frac{5}{2}$$

وقتی تا ۳۰ واحد کاهش مجاز است، پس با ۲۵ واحد کاهش هم موجه بودن جدول حفظ می‌شود.

پس این گزینه نیز درست است.

۸. گزینه «۳»

مقادیر قیمت‌های سایه همان y_i می‌باشند که داریم:

$$y_i = C_B B^{-1} = \underset{C_{x_1}\ \ C_{S_2}\ \ C_{x_2}}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-4, 0, 13)$$

اگر به جدول دقت کنیم، مشخص می شود که عدد S_1 در سطر تابع هدف منفی است، پس می‌تواند ورودی شود ولی ستونش تماماً صفر و منفی است و خروجی ندارد و جواب اولیه نامحدود است، در نتیجه ثانویه بدون جواب می‌باشد که همان‌طورکه از مقادیر قیمت‌های سایه مشخص است و مقدار y_1 منفی شده است، ثانویه جواب بهینه ندارد.

۹. گزینه «۱»

همان‌طورکه در سؤال قبل توضیح دادیم، طبق رابطه $z = y_i b_i$، عبارت $\frac{\Delta z}{\Delta b_1}$ همان y_1 خواهد بود. که در جدول عدد زیر S_1 در سطر تابع هدف می‌باشد که همان‌گونه که از جدول مشخص است $y_1 = 2$ می‌باشد.

$$\Delta z = y_i \Delta b_i \rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta b_1} = y_1$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_2} = y_2$$

۱۰. گزینه «۲»

همان‌طورکه در مبحث ثانویه خواندیم، محدودیت‌های ثانویه را با استفاده از متغیرهای مسأله اولیه می‌نویسیم، پس محدودیت اول مسأله ثانویه، با استفاده از ضرایب متغیر $x_{۱}$ در محدودیت‌های مسأله اولیه و ضریب آن در تابع هدف (به‌عنوان عدد سمت راست) نوشته شده است، بنابراین با داشتن محدودیت اول ثانویه در اصل ضرایب متغیر $x_{۱}$ را داریم، پس:

$$C_{۱} = ۱$$

$$P_{x_{۱}} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$z_j - C_j = y_i P_x - C_j$$

از طرفی طبق رابطه $C_j - z_j$ به y_i نیز نیاز داریم، که می‌توانیم طبق رابطه مقابل آن را به‌دست آوریم و در رابطه $z_j - C_j$ جایگذاری کنیم:

$$y_i = C_B B^{-۱} = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ? & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸ & ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow y_{۱} = ۸$$

$$\left(z_j - C_j\right)_{x_{۱}} = y_i P_{x_{۱}} - C_{۱} = \begin{pmatrix} ۸ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} - ۱ = ۸ - ۱ = ۷$$

۱۱. گزینه «۳»

از آن‌جا که ماتریس B، ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیت‌ها می‌باشد، پس با استفاده از آن می‌توانیم متغیرهایی که پایه‌ای هستند را مشخص کنیم که $x_{۱}$، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ می‌باشند، و آن‌ها را در یک جدول با اطلاعاتی که داریم درنظر می‌گیریم:

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

ضرایب $x_{۱}$
ضرایب $x_{۲}$
ضرایب $x_{۳}$

	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$S_{۱}$	$S_{۲}$	$S_{۳}$
z	۰	۰	۰			
$x_{۱}$	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$x_{۲}$	۰	۱	۰	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$x_{۳}$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$

حال برای این‌که ببینیم این پایه شدنی و بهینه است یا خیر، پس باید y_iها در سطر تابع هدف ($z_j - C_j$ها صفر می‌باشند چون متغیرها اساسی هستند و ستونشان یکه است) را به‌منظور بررسی بهینگی و اعداد سمت راست جدول $\left(b'_i\right)$ را به‌منظور بررسی موجه و شدنی بودن به‌دست آوریم:

$$b'_i = B^{-۱} b_i = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow$$ در نتیجه پایه موجه و شدنی است. و حالت تبهگنی دارد

پس جدول بهینه است و نشانه بهینه چندگانه نیز دارد. $\Leftarrow$ $y_i = C_B B^{-1} = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

(چون درصورت ورودی شدن، min نسبت صفر می‌شود، پس فقط تبهگنی داریم و چندگانگی نداریم)

۱۲. گزینه «۱»

هنگامی که فقط بخشی از مدل تغییر می‌کند، می‌توانیم با استفاده از روابط ماتریسی آن بخش از جدول نهایی که دچار تغییر می‌شود را بروز کنیم و ببینیم چه اتفاقی برای جدول نهایی پیش می‌آید و آن را تحلیل کنیم.

با تغییر سمت راست محدودیت‌ها، اعداد سمت راست جدول و همین‌طور مقدار تابع هدف تغییر می‌کنند. برای بررسی میزان تغییر جدول، می‌توانیم تغییرات را در مدل اعمال کرده و با استفاده از روابط $b'_i = B^{-1}b_i$ و $z = y_i b_i$ مقدار جدید اعداد سمت راست و تابع هدف را به‌دست آوریم.

اما از آن‌جا که مدل اولیه را نداریم، می‌توانیم روابط را به شکل مقابل تغییر داده و از آن‌ها استفاده کنیم:

$$\Delta b'_i = B^{-1}\Delta b_i \rightarrow \Delta b'_i = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۳ \\ -۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ -۳ \end{pmatrix} \rightarrow b'_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} ۱۳-۰ \\ ۱۸-۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۱۸ \end{pmatrix} \rightarrow \text{موجه باقی می‌ماند.}$$

$$\Delta z = y_i \Delta b_i \rightarrow \Delta z = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۳ \\ ۳ \end{pmatrix} = -۹ \rightarrow \text{۹ واحد کاهش}$$

* دقت کنیم که این روابط میزان تغییر اعداد سمت راست و تابع هدف را نشان می‌دهند، نه مقدار جدید آن‌ها.

۱۳. گزینه «۱»

گفتیم که تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، باعث تغییر سمت راست جدول و مقدار تابع هدف می‌شود. قبل از این‌که ببینیم تابع هدف چه مقدار تغییر می‌کند، ابتدا مقادیر جدید اعداد سمت راست را به‌دست می‌آوریم تا از موجه بودن جدول درحالت جدید مطمئن شویم.

$$b'_{i\,\text{جدید}} = B^{-1} b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{-۱}{۴} \\ \frac{-۱}{۸} & \frac{۵}{۸} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲۵ \\ ۱۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱۰}{۴} \\ \frac{۵۰}{۸} \end{pmatrix} \rightarrow \text{پس جدول موجه می‌ماند.}$$

$$\Delta z = y_i \Delta b_i = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۷}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۵ \\ ۵ \end{pmatrix} = ۲۰ \rightarrow \text{مقدار تابع هدف ۲۰ واحد افزایش می‌یابد.}$$

۱۴. گزینه «۴»

با تغییر ضرایب تابع هدف، مقادیر سطر تابع هدف $(z_j - C_j)$ و مقدار z امکان دارد تغییر کند.

درصورتی‌که ضریب یک متغیر غیراساسی در تابع هدف تغییر کند، فقط $z_j - C_j$ همان متغیر تغییر خواهد کرد و امکان دارد جدول بهینه باقی بماند و یا تبدیل به بهینه چندگانه شود و یا جدول بهینه را غیربهینه کند که در آن صورت باید ورودی شود و جدول ادامه پیدا کند. اگر ضریب یک متغیر اساسی در تابع هدف تغییر کند، بر کل سطر تابع هدف اثر می‌گذارد و باز هم امکان دارد جدول بهینه باقی مانده، غیربهینه شده و یا تبدیل به بهینه چندگانه شود. حال برای بررسی بهینگی جدول می‌توان تغییرات را در ضرایب اعمال کرده و با استفاده از روابط ماتریسی مقادیر جدید $z_j - C_j$ متغیرها را به‌دست آورد. در این سؤال خواهیم داشت:

$C_۱$ جدید $= ۲+۱ = ۳$

$C_۲$ جدید $= -۱+۲ = +۱$

$C_۳$ جدید $= ۳+۳ = ۶$

$$y_i \text{ جدید } = C_B B^{-1} = \begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

مقادیر y مثبت هستند، پس هیچ‌یک باعث غیربهینگی جدول نمی‌شود.

مقادیر جدید $z_j - C_j$ را برای متغیر غیراساسی $x_۲$ نیز به‌دست می‌آوریم (متغیرهای $x_۱$ و $x_۳$ اساسی هستند و $z_j - C_j$ آن‌ها صفر می‌باشد و نیاز به محاسبه ندارد).

$$z_۲ - C_۲ = -C_۲ + y_i P_{x_۲} = -۱ + \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = -۱ + ۹ = ۸$$

پس در سطر تابع هدف، مقدار تمام متغیرها مثبت باقی می‌ماند و جدول هم‌چنان بهینه باقی خواهد ماند.

چون منبع دوم باقی‌مانده دارد $(S_۲ = ۲)$، پس خرید آن هم‌چنان به صرفه نمی‌با شد. ارزش منبع سوم در جدول جدید برابر ۳ می‌با شد $(y_۳ = ۳)$ پس با قیمت خرید ۲، خرید آن با صرفه ا ست. منبع اول نیز ارز شش ۳ می‌با شد $(y_۱ = ۳)$، پس با قیمت ۲ خرید آن نیز اقتصادی می‌باشد.

* علاوه بر راه‌حلی که توضیح داده شد، می‌توان مقادیر جدید سطر تابع هدف را از طریق یک راه‌حل تستی نیز به‌دست آورد، بدین شکل که هر متغیری که ضریب آن در تابع هدف تغییر کرده، مقدار آن در سطر تابع هدف را منهای میزان تغییر ضریبش کنیم و درصورتی‌که متغیر اساسی بود، جدول به یکه کردن نیز نیاز خواهد داشت:

$$\left(z_j - C_j\right)_{\text{جدید}} = \left(z_j - C_j\right)_{\text{فعلی}} - \Delta C_i$$

پس همان‌طورکه از جدول جدید مشخص می‌شود، مقدار جدید $z_۲ - C_۲ = ۸$ می‌باشد و مقادیر جدید y نیز $\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ است، که در بالا با استفاده از روابط ماتریسی این مقادیر به‌دست آمد.

یکسان‌سازی

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$R_۱$	$S_۲$	$R_۲$	$S_۳$	
z	۰−۱	۵−۲	۰−۳	۲+M	۰	M	۱	۸
$x_۱$	۱	−۱	۰	۱	۰	۰	−۱	۱
$x_۳$	۰	۲	۱	۰	۰	۰	۱	۲
$S_۲$	۰	۳	۰	۱	۱	−۱	۰	۲
z	۰	۸	۰	۳+M	۰	M	۳	۱۵
$x_۱$								
$x_۳$								
$S_۲$								

۱۵. گزینه «۳»

هنگامی که یک متغیر جدید به مدل اضافه می‌شود، باید دید که آیا اضافه شدن آن سودی ایجاد می‌کند یا خیر. درصورتی متغیر جدید برای مسأله سود خواهد داشت که ورودی شود و در نتیجه با وارد شدن، جدول ادامه پیدا کرده و مقدار z بهبود یابد. برای این‌که ببینیم ورودی می‌شود یا نه، باید مقدار آن در سطر تابع هدف $\left(z_j - C_j\right)$ در جدول

نهایی را به‌دست آوریم که درصورتی‌که منفی باشد (چون مسأله max است) ورودی می‌شود، در این صورت با محاسبه P'_x برای آن، می‌توان min نسبت و خروجی را تشخیص داده و میزان تغییر تابع را به‌دست آورد.

$$(z_j-C_j)_{x_3}=-C_3+y_iP_{x_3}=-10+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{7}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=-2<0\rightarrow$$ ورودی می‌شود و به نفع تابع خواهد بود.

$$P'_{x_3}=B^{-1}P_{x_3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

	$\downarrow x_3$		
z	-2		
x_1	1	$\frac{5}{2}$	$\rightarrow \underset{\text{نسبت}}{\min}=\frac{5}{2}$
x_2	1	$\frac{15}{4}$	

به مقدار z به اندازه $\Delta z=-(-2)\left(\frac{5}{2}\right)=5\rightarrow$

۵ واحد اضافه می‌شود که چون ضریب x_3 در تابع هدف ۱۰ می‌باشد، پس یعنی به‌ازای تولید هر واحد x_3، $\frac{10}{5}=2$ واحد به مقدار z اضافه شده است.

۱۶. گزینه «۲»

همان‌طورکه گفتیم درصورتی تولید یک محصول اقتصادی خواهد شد، که در جدول سیمپلکس ورودی شود. حال در دو صورت می‌تواند ورودی شود:

ورودی شدن با تغییر مقدار تابع هدف (حالت max) $\rightarrow z_j-C_j<0$

ورودی شدن با عدم تغییر مقدار تابع هدف (حالت max) $\rightarrow z_j-C_j=0$

که حالت دوم، حالتی است که بهینه چندگانه خواهد شد و با ورودی شدن متغیر، مقدار z تغییر نمی‌کند.

پس در این سؤال برای آن‌که تولید محصول چهارم اقتصادی شود، باید ورودی شود که در این صورت:

$$(z_j-C_j)_{x_4}\le 0$$

$$y_iP_{x_4}-C_4\le 0$$

$$\begin{cases} y_i=C_BB^{-1}=\begin{pmatrix}50 & 69\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-1}{6}\\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 7\end{pmatrix}\\ B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\rightarrow B^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix}6 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}}{18}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-1}{6}\\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}\end{cases}$$

ستون x_1 در محدودیت‌ها
ستون x_2 در محدودیت‌ها

$$y_i P_{x_۴} - C_۴ \le ۰ \Rightarrow \begin{pmatrix} ۹ & ۷ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۹ \\ ۴ \end{pmatrix} - C_۴ \le ۰$$

یعنی سود $x_۴$ حداقل باید **۱۰۹** باشد $۱۰۹ - C_۴ \le ۰ \Rightarrow C_۴ \ge ۱۰۹ \Rightarrow$

پس باید نسبت به الآن $۱۰۹ - ۳۶ = ۷۳$ واحد افزایش یابد.

۱۷. گزینه «۴»

هنگامی که محدودیت جدید به مدل اضافه می‌شود، **۲** حالت ممکن است پیش بیاید، یا نقطه بهینه داخل محدودیت خواهد بود که در این صورت اضافه شدن محدودیت تغییری در مقدار تابع هدف ایجاد نمی‌کند، یا محدودیت جدید باعث خارج شدن نقطه بهینه از منطقه موجه خواهد شد، که در این صورت مقدار تابع هدف تغییر کرده و بدتر می‌شود و باید محدودیت را به جدول نهایی اضافه کرده و با یکه کردن جدول و حل از طریق سیمپلکس ثانویه مقدار جدید تابع هدف را به‌دست آورد. حال در این‌جا برای این‌که ببینیم نقطه بهینه داخل محدودیت خواهد بود یا خارج از آن، نقطه را داخل محدودیت گذاشته تا ببینیم صدق می‌کند یا نه:

$$\begin{array}{l} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = ۵ \\ x_۳ = ۲ \\ x_۴ = ۰ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x_۱ + x_۲ + x_۴ \le ۳ \\ ۰ + ۵ + ۰ \le ۳ \quad \Rightarrow \quad ۵ \le ۳ \ \times \end{array}$$

پس نقطه بهینه فعلی داخل محدودیت صدق نکرد در نتیجه مقدار تابع هدف تغییر می‌کند و بدتر می‌شود.

البته دقت کنید که در این سؤال دیگر نیازی به اضافه کردن محدودیت به جدول و حل از طریق سیمپلکس ثانویه نیست، چرا که می‌دانیم مقدار تابع هدف بدتر می شود و تنها گزینه‌ای که مقدارش از $z = ۲۰$ کم‌تر است، گزینه چهارم می‌باشد.

۱۸. گزینه «۲»

همان‌طورکه بیان شد، برای این‌که محصولی صرفه اقتصادی داشته باشد باید ورودی شود و برای ورودی شدن باید $(z_j - C_j)$ آن کوچک‌تر مساوی صفر (چون مسأله max است) باشد، در نتیجه:

$$z_j - C_j = y_i P_{x_۳} - C_۳ \le ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۷ & ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix} - C_۳ \le ۰$$

$$۲۲ - C_۳ \le ۰ \quad \Rightarrow C_۳ \ge ۲۲$$

$$۲۲ - ۱۸ = ۴$$ **حداقل ۴ واحد**

$$y_i = C_B B^{-1} = \begin{pmatrix} ۴۵ & ۲۷ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{۲}{۹} & \frac{-۱}{۱۸} \\ \frac{-۱}{۹} & \frac{۵}{۱۸} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۷ & ۵ \end{pmatrix}$$

ضریب $x_۱$ در تابع هدف

ضریب $x_۲$ در تابع هدف

$$B = \begin{pmatrix} ۵ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} ۵ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} ۴ & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{pmatrix}}{۲۰ - ۲} = \begin{pmatrix} \frac{۲}{۹} & \frac{-۱}{۱۸} \\ \frac{-۱}{۹} & \frac{۵}{۱۸} \end{pmatrix}$$

ستون $x_۱$ در محدودیت‌ها

ستون $x_۲$ در محدودیت‌ها

۱۹. گزینه «۳»

در سؤال‌های قبل گفتیم که تغییر سمت راست محدودیت می‌تواند بر اعداد سمت راست جدول و مقدار تابع هدف اثر بگذارد و باید مقادیر اعداد سمت راست جدید را به‌دست آوریم تا از موجه بودن جدول اطمینان حاصل کنیم.

$$b'_{i\,\text{جدید}} = B^{-1} b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ \frac{61}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

همان‌طورکه مشـخص اسـت، جدول موجه باقی می‌ماند و فقط مقدار باقی‌مانده منبع اول ۳ واحد کاهش می‌یابد. مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند، چرا که ارزش منبع اول صفر است (S_1 در پایه است) و اضافه شدن آن سودی اضافه نمی‌کند، طبق روابط نیز خواهیم داشت:

$$z_{\text{جدید}} = y_i b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{85}{3}$$

* دقت کنید هنگامی که محدودیتی بزرگ‌تر مســـاوی اســـت و در جدول هم S و هم R برای یک محدودیت داریم، اعداد زیر R هستند که y و B^{-1} را تشکیل می‌دهند.

۲۰. گزینه «۳»

درصـورتی‌که ضـریب متغیر در محدودیت تغییر کند، می‌تواند باعث تغییر اعداد سـتون آن متغیر در جدول نهایی (یعنی P'_x و $z_j - C_j$ آن متغیر) شــود، در نتیجه امکان دارد جدول بهینه را غیربهینه و یا بهینه چندگانه کند و یا منطقه موجه و حتی جواب را نامحدود کند که با به‌دسـت آوردن سـتون جدید متغیر، می‌توان تغییرات را بررسـی کرد. برای به‌دسـت آوردن ستون جدید از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} \text{کل ستون} \\ \text{متغیر } x_j \\ \text{در جدول نهایی} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{کل ستون} \\ S \text{ یا } R \\ \text{محدودیت در} \\ \text{در جدول نهایی} \end{pmatrix} \Delta a_{ij} = \begin{pmatrix} \text{کل ستون} \\ \text{جدید متغیر } x_j \\ \text{در جدول نهایی} \end{pmatrix}$$

ضریب متغیر x_3 در محدودیت دوم ۷ واحد کاهش یافته $\Rightarrow \Delta a_{23} = -7$

$$-7 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{31}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

در نتیجه جدول غیربهینه خواهد شـد و از آن‌جا که $z_j - C_{j(x_3)}$ منفی اسـت، پس x_3 ورودی می‌شـود و با اسـتفاده از قانون min نسبت خروجی را انتخاب می‌کنیم:

	$x_۲ \downarrow$		
z	$\frac{-۲}{۳}$		
$x_۱$	$\frac{۵}{۳}$	$\leftarrow \frac{۲۳}{۵}$	$\frac{۲۳}{۳}$
$S_۱$	$\frac{۳۱}{۳}$	$\leftarrow \frac{۷۰}{۳۱}$	$\frac{۷۰}{۳}$
$\leftarrow x_۲$	۳	$\leftarrow \frac{۵}{۳}$	۵

که مشخص می‌شود که $x_۲$ خروجی خواهد بود.

۲۱. گزینه «۳»

در صورت تغییر مقدار سمت را ست محدودیت، سمت را ست جدول نهایی ممکن ا ست تغییر کند که این تغییر را از ۲ طریق می‌توانیم به‌دست آوریم، به‌دست آوردن میزان جدید و یا به‌دست آوردن میزان تغییر.

$$b_۱ = ۸ \rightarrow b_{۱\,\text{جدید}} = ۴ \qquad \Delta b_i = -۴$$

$$\text{راه اول: } b'_{i\,\text{جدید}} = B^{-۱} b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۱}{۷} & ۰ \\ \frac{۱}{۱۴} & \frac{-۲}{۲۱} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ \frac{۵}{۷} \\ \frac{۱۰}{۱۴۷} \end{pmatrix}$$

$$\text{راه دوم: } b'_{i\,\text{جدید}} = b'_{i\,\text{قدیم}} + \Delta b'_i \quad \Rightarrow \Delta b'_i = B^{-۱} \Delta b_i = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۱}{۷} & ۰ \\ \frac{۱}{۱۴} & \frac{-۲}{۲۱} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ \frac{-۴}{۷} \\ \frac{-۴}{۱۴} \end{pmatrix}$$

$$b'_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۹}{۷} \\ \frac{۱۰}{۲۱} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -۲ \\ \frac{-۴}{۷} \\ \frac{-۴}{۱۴} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ \frac{۵}{۷} \\ \frac{۱۰}{۱۴۷} \end{pmatrix}$$

از آن‌جا که مقدار $S_۳ = -۲$ می شود، پس جدول غیرموجه ا ست و چون بهینه ا ست می‌توان از طریق سیمپلکس ثانویه مقدار جدید آن را به‌دست آورد، پس خواهیم داشت:

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R_3	
$\rightarrow z = y_i b_i$	z	۰	۰	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{21}$	۰	۰	$\frac{34}{21}$
$\xleftarrow{S_3}$		۰	۰	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱	-1	-2
	x_1	۱	۰	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	۰	۰	$\frac{+5}{7}$
	x_2	۰	۱	$\frac{25}{42}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{-2}{21}$	۰	۰	$\frac{+10}{147}$

$$z_{\text{جدید}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{4}{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{34}{21}$$

در روش سیمپلکس ثانویه، برای تعیین ورودی سطر تابع هدف را بر اعداد منفی سطر لولا تقسیم می‌کنیم، و چون در سطر S_3 عدد منفی نداریم، پس ورودی نداریم، در نتیجه مسأله امکان‌ناپذیر است.

۲۲. گزینه «۴»

همان‌طورکه قبلاً بیان شد، چون متغیر x_1 ا سا سی ا ست، می‌توان مقدار آن در سطر تابع هدف را از طریق رابطه زیر تغییر داد و سپس آن را یکه کنیم و مقادیر سطر تابع هدف را برای بقیه متغیرها به‌دست آوریم:

$$\left(z_j - C_j\right)_{\text{جدید}} = \left(z_j - C_j\right)_{\text{فعلی}} - \Delta C \qquad \Rightarrow \left(z_j - C_j\right)_{x_1 \, \text{جدید}} = 0 - (+3) = -3$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R_3	
z	-3	۰	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{21}$	۰	۰	$\frac{64}{21}$
S_3	۰	۰	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱	-1	۰
x_1	۱	۰	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	۰	۰	$\frac{9}{7}$
x_2	۰	۱	$\frac{25}{42}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{-2}{21}$	۰	۰	$\frac{10}{21}$
z	۰	۰	$\frac{-31}{84}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{21}$	۰	۰	$\frac{145}{21}$
S_3	۰	۰	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱	-1	۰
x_1	۱	۰	$\frac{-1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	۰	۰	$\frac{9}{7}$
x_2	۰	۱	$\frac{25}{42}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{-2}{21}$	۰	۰	$\frac{10}{21}$

از آن‌جا که مقدار x_3 در سطر تابع هدف منفی می‌شود، پس جدول غیربهینه بوده و x_3 ورودی می‌شود و min نسبت برابر صفر و متعلق به S_3 می‌باشد، پس با ورود x_3 متغیر S_3 خارج خواهد شد.

۲۳. گزینه «۴»

هنگامی که بیان شده است سمت راست تا چه حد می‌تواند افزایش یابد، فرض می‌کنیم k واحد زیاد شود، پس:

$$\Delta b_i = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta b'_i = B^{-1} \Delta b_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{5} \\ \frac{-2k}{5} \end{pmatrix}$$

در نتیجه $b'_{i\text{جدید}}$ خواهد بود.

$$b'_{i\text{جدید}} = b'_{i\text{فعلی}} + \Delta b'_i = \begin{pmatrix} ۶ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{۵} \\ \frac{-۲k}{۵} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶+\frac{k}{۵} \\ ۱-\frac{۲k}{۵} \end{pmatrix}$$

و می‌دانیم برای این‌که جدول موجه باشد، باید اعداد سمت راست آن منفی نباشند، در نتیجه اعداد سمت راست جدید را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم تا حدود کاهش و یا افزایش آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۶+\frac{k}{۵} \ge ۰ \quad \Rightarrow \frac{k}{۵} \ge -۶ \rightarrow k \ge -۳۰ \\ ۱-\frac{۲k}{۵} \ge ۰ \quad \Rightarrow \frac{۲k}{۵} \le ۱ \rightarrow k \le \frac{۵}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow -۳۰ \le k \le \frac{۵}{۲}$$

پس مقدار منبع اول تا $\frac{۵}{۲}$ واحد می‌تواند افزایش یابد و تا ۳۰ واحد می‌تواند کاهش یابد.

۲۴. گزینه «۱»

برای این‌که ببینیم آیا محدودیت جدید باعث تغییر نقطه بهینه و همین‌طور مقدار تابع هدف می‌شود یا نه، باید بررسی کنیم که آیا نقطه بهینه فعلی در محدودیت جدید صدق می‌کند یا نه و در صورتی‌که صدق کرد، پس نقطه بهینه تغییر نکرده است و درصورتی‌که صدق نکند، نقطه بهینه تغییر کرده و مقدار تابع هدف بدتر می‌شود. از آن‌جا که ماتریس B^{-1} را داریم، پس می‌توانیم مقادیر سمت راست (که همان مختصات نقطه بهینه است) را به‌دست آوریم:

$$b'_i = B^{-1}b_i = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & ۰ & \frac{۳}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۶۴ \\ ۴۰ \\ ۲۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸ \\ ۲۰ \\ ۴ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_۱ \\ \rightarrow x_۳ \\ \rightarrow S_۲ \end{array}$$

$$۵x_۱ + ۷x_۲ - x_۳ \ge ۴ \quad \Rightarrow ۵(۸) + ۷(۰) - ۲۰ \ge ۴$$

$$۲۰ \ge ۴ \quad \Rightarrow$$

پس نقطه بهینه و مقدار z تغییری نمی‌کند.

۲۵. گزینه «۲»

همان‌طورکه در سؤال‌های قبل هم بیان شد، باید نقطه بهینه را در محدودیت جدید بررسی کنیم تا ببینیم که آیا صدق می‌کند یا نه.

$$\begin{array}{l} x_۱ = \frac{۵}{۲} \\ x_۲ = \frac{۱۵}{۴} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} ۲x_۱ + ۴x_۲ \le ۲۰ \\ ۲\left(\frac{۵}{۲}\right) + ۴\left(\frac{۱۵}{۴}\right) \le ۲۰ \\ ۲۰ = ۲۰ \end{array}$$

آن‌گونه که مشخص است، نقطه بهینه داخل محدودیت جدید صدق می‌کند، پس مقدار بهینه تابع هدف تغییر نخواهد کرد.

اما از آن‌جا که محدودیت جدید هم از گوشه بهینه عبور می‌کند (چون مساوی شده است)، پس نقطه بهینه روی محدودیت است)، پس از نقطه بهینه یک محدودیت دیگر هم رد شده است و تبهگنی داریم.

۲۶. گزینه «۴»

* همواره بدانیم که:

اضافه شدن یک محدودیت در ثانویه: معادل اضافه شدن یک متغیر در اولیه است.

اضافه شدن یک متغیر در ثانویه: معادل اضافه شدن یک محدودیت در اولیه است.

پس در این سؤال با توجه به این‌که متغیری با ضرایب $\begin{pmatrix} ۳۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$ به مسأله ثانویه اضافه شده است، می‌توانیم بگوییم محدودیت زیر به اولیه اضافه شده است:

$$x_۱ + ۲x_۲ \leq ۳۰$$

پس می‌توانیم وضعیت نقطه بهینه را در این محدودیت جدید بررسی کنیم:

$$\begin{matrix} x_۱ = \frac{۵}{۲} \\ x_۲ = \frac{۱۵}{۴} \end{matrix} \rightarrow \frac{۵}{۲} + ۲\left(\frac{۱۵}{۴}\right) \leq ۳۰$$

و چون نقطه بهینه در محدودیت صدق می‌کند، جواب بهینه تغییر نمی‌کند. $۱۰ \leq ۳۰ \quad \Rightarrow$

۲۷. گزینه «۱»

چون اعداد سمت راست محدودیت‌ها را نداریم، می‌توانیم با استفاده از Δb_i، $\Delta b'_i$ را به‌دست آورده و b'_i جدید را حساب کنیم.

$$\Delta b_i = \begin{pmatrix} +۲ \\ ۰ \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta b'_i = B^{-۱}\Delta b_i = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

$$b'_{i\,\text{جدید}} = b'_{i\,\text{فعلی}} + \Delta b'_i = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

۲۸. گزینه «۱»

شرط این‌که $x_۱$ ورودی شود، این است که $(z_j - C_j)$ جدید آن منفی یا صفر شود تا بتواند حداقل به‌عنوان ورودی بهینه چندگانه وارد شود. همان‌طورکه گفته شد برای به‌دست آوردن $(z_j - C_j)$ جدید می‌توان مطابق زیر عمل نمود.

$$(z_j - C_j)_{x_۱\,\text{جدید}} = (z_j - C_j)_{x_۱\,\text{فعلی}} - (\Delta C_j)_{x_۱}$$

$$(z_j - C_j)_{x_۱\,\text{جدید}} = ۳ - \Delta C_{x_۱} \leq ۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta C_{x_۱} \geq ۳$$

پس یعنی باید حداقل ۳ واحد افزایش یابد. (Δ به معنی تغییرات است، پس تغییرات حداقل ۳+ واحد افزایش است).

۲۹. گزینه «۴»

$$(z_j - C_j)_{x_۱\,\text{جدید}} = (z_j - C_j)_{x_۱\,\text{فعلی}} - (\Delta C_j)_{x_۱}$$

از آن‌جا که $x_۱$ متغیر پایه‌ای است، پس نیاز به یکه‌سازی دارد. $(z_j - C_j)_{x_۱\,\text{جدید}} = ۰ - (-۲) = +۲ \rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
z	۲	۵	۰	۱	۲	۱۴۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰
z	۰	۱-	۰	۱-	۳	۱۱۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰

یکسازی

حال با توجه به جدول هم x_2 (محصول دوم) و هم S_1 (مانده منبع اول) شرط ورود دارند و در هردو حالت چون باید به اعداد مثبت ستون لولا تقسیم کنیم، فقط x_1 می‌تواند خارج شود، پس یا گزینه ۲ درست است یا گزینه ۴.

در این مواقع که شرایط ورود یکسان است باید سطر تابع هدف جدول نوشته شود تا ببینیم با ورود کدام متغیر جدول بعد بهینه می‌شود (فقط محاسبه سطر z جدول بعد). و همان‌طورکه مشاهده می‌شود، درصورت ورود S_1 جدول بعد بهینه خواهد بود.

درصورت ورود S_1

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow S_1$	S_2	
z	۰	۱-	۰	۱-	۳	۱۱۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰
z	۱	۲	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۱۲۵

جدول بهینه می‌شود.

درصورت ورود x_2

	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	S_1	S_2	
z	۰	۱-	۰	۱-	۳	۱۱۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰
z	$\frac{1}{3}$	۰	۰	$\frac{-2}{3}$	$\frac{17}{6}$	۱۱۵

جدول غیربهینه باقی می‌ماند.

۳۰. گزینه «۳»

این‌که تولید محصول سوم صرفه اقتصادی داشته باشد، یعنی x_3 باید ورودی شود و برای ورودی شدن، باید $z_j - C_j$ آن کوچک‌تر مساوی صفر باشد (چون تابع max است). از آن‌جا که می‌دانیم x_4 و x_2 متغیرهای اساسی هستند، پس ماتریس B مشخص می شود که با معکوس کردن آن می‌توانیم B^{-1} را به‌دست آوریم و $z_j - C_j$ را برای x_3 حساب کرده و کوچک‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}{30} = \begin{pmatrix} \frac{4}{30} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-2}{30} & \frac{8}{30} \end{pmatrix}$$

ستون ضرایب x_4 در محدودیت‌ها

ستون ضرایب x_2 در محدودیت‌ها

$$(z_j - C_j)_{x_3} \le 0 \quad \Rightarrow -C_3 + C_B B^{-1} P_{x_3} \le 0$$

$$-C_3 + \begin{pmatrix} 36 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{30} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-2}{30} & \frac{8}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \le 0$$

$$-C_3 + \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \le 0 \quad \Rightarrow -C_3 + 21 \le 0$$

$$C_3 \ge 21 \quad \Rightarrow 21 - 18 = 3$$

حداقل **۳** واحد باید افزایش یابد تا تولید آن اقتصادی شود.

۳۱. گزینه «۴»

برای تعیین دامنه تغییرات متغیرهای اساسی کافیست سطر z را بر سطر متغیر پایه‌ای تقسیم کنیم (به‌جز R و متغیرهای اساسی)، سپس کوچک‌ترین نسبت مثبت، قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان کاهش C_j را مشخص می‌کند ()کوچک‌ترین نسبت مثبت)$-\ge \Delta C_j$) و کوچک‌ترین نسبت منفی (از نظر قدرمطلق) قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان افزایش C_j را نشان می‌دهد ((کوچک‌ترین نسبت منفی از نظر قدرمطلق) $- \ge \Delta C_j$).

متغیر x_2 نیز اساسی است، پس سطر z را بر سطر x_2 تقسیم می‌کنیم:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
z	۴		۲		۵
x_2	۲		۲		۱
	↓		↓		↓
	$\frac{4}{2}=2$		$\frac{2}{2}=1$		$\frac{5}{1}=5$

تمام نسبت‌ها مثبت است و قرینه کم‌ترین نسبت مثبت حد پایین قرار می‌گیرد.

* نسبت منفی نداریم، یعنی حدی برای بالا نداریم.

$$\boxed{-1 \le \Delta C_2}$$

۳۲. گزینه «۳»

برای افزایش سود، منبعی بهتر است انتخاب شود که ارزش بیش‌تری دارد، با توجه به جدول ارزش منابع به صورت زیر است:

$$y_1 = \frac{29}{5} \quad , \quad y_2 = \frac{-2}{5}$$

از آن‌جا که ارزش منبع اول بیش‌تر از ارزش منبع دوم است، در نتیجه بهتر است میزان منبع اول افزایش یابد، اما این‌که به چه مقدار افزایش یابد، منظور همان دامنه مجاز عدد سمت راست آن است.

برای محاسبه دامنه مجاز b_i، کافیست ستون سمت راست جدول نهایی (b'_i) را بر P'_{S_i} (در صورتی‌که متغیر مصنوعی وجود داشته باشد P'_{R_i}) تقسیم کنیم، سپس کوچک‌ترین نسبت مثبت، قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان کاهش b_i را مشخص می‌کند ((کوچک‌ترین نسبت مثبت)$- \ge \Delta b_i$) و کوچک‌ترین نسبت منفی (از نظر قدرمطلق) قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان افزایش b_i را نشان می‌دهد ((کوچک‌ترین نسبت منفی از نظر قدرمطلق)$- \le \Delta b_i$).

پس برای منبع اول داریم:

S_1	R.H.S	
$\frac{2}{5}$	۱۶	$\rightarrow \frac{16}{\frac{2}{5}} = 40$
$\frac{1}{5}$	۱۸	$\rightarrow \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$

$$-40 \le \Delta b_1 \le \infty$$

چون نسبت منفی نداریم، یعنی حد بالا ندارد و می‌تواند تا بی‌نهایت افزایش یابد.

$$-40 \le \Delta b_1 \le \infty \quad \Rightarrow \quad 10 \le b_1 \le \infty$$

۳۳. گزینه «۱»

با توجه به محدودیت دوم ثانویه، می‌توان به ضرایب متغیر x_2 در تابع هدف و محدودیت‌های مسأله اولیه دست یافت.
در نتیجه برای متغیر x_2 خواهیم داشت:

$$C_2 = 7 \quad , \quad P_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

در این صورت مقدار x_2 در سطر تابع هدف مطابق زیر است:

$$(z_j - C_j)_{x_2} = -C_2 + C_B B^{-1} P_{x_2} = -7 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -7 + 8 = 1$$

جدول بهینه است.

حال درصورتی‌که ستون ضرایب x_2 به $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ تغییر کند، مقدار x_2 در سطر تابع هدف خواهد شد:

$$(z_j - C_j)_{x_2\,\text{جدید}} = -C_2 + C_B B^{-1} P_x = -7 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -7 + 6 = -1$$

و جدول غیربهینه خواهد شد و متغیر x_2 وارد پایه می‌شود، برای تست می‌نیمم نسبت و تعیین خروجی به ستون جدید x_2 (P'_{x_2}) نیاز داریم که مطابق زیر است:

$$P'_{x_2\,\text{جدید}} = B^{-1} P_{x_2\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

از آن‌جا که برای تست می‌نیمم نسبت، اعداد سمت راست را بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم می‌کنیم، پس فقط x_3 شرایط خارج شدن را دارد.

	$\downarrow x_۲$	
z	-۱	
$x_۱$	-۱	
$\leftarrow x_۳$	۵	
$x_۴$	-۱	

۳۴. گزینه «۳»

تغییر اعداد سمت را ست محدودیت‌ها، بر سمت را ست جدول اثر می‌گذارد، پس باید این تغییرات به‌گونه‌ای با شد که جدول موجه باقی بماند، یعنی سمت راست جدول منفی نشود. در نتیجه تغییرات داده شده را اعمال می‌کنیم و بخش‌های تغییریافته جدول نهایی را به‌دست آورده و شرط موجه بودن را برایشان درنظر می‌گیریم:

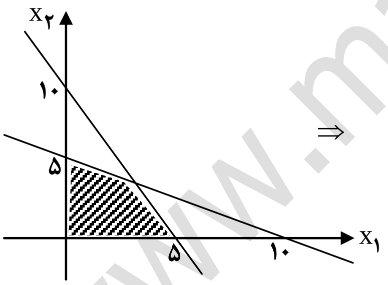
$$B^{-۱}=\begin{pmatrix}\frac{۴}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{pmatrix} \qquad \text{براساس جدول:}$$

$$b'_{i\ \text{جدید}}=B^{-۱}b_{i\ \text{جدید}}=\begin{pmatrix}\frac{۴}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{-۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۳+۳\theta\\ ۹-۳\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۴+۴\theta-۳+\theta\\ -۱-\theta+۳-\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱+۵\theta\\ ۲-۲\theta\end{pmatrix}$$

$$\text{شرط موجه بودن}\begin{cases}۱+۵\theta\geq ۰ & \rightarrow \theta\geq\frac{-۱}{۵}\\ ۲-۲\theta\geq ۰ & \rightarrow\theta\leq ۱\end{cases}\rightarrow\frac{-۱}{۵}\leq\theta\leq ۱$$

۳۵. گزینه «۱»

برای به‌دست آوردن نقاط شکست مدل، باید شیب تابع هدف را برابر شیب محدودیت‌های مؤثر منطقه قرار دهیم تا θ یا همان نقاط شکست به‌دست آیند.



$\Rightarrow$ **هردو محدودیت مؤثر می‌باشند.**

$$\text{شیب تابع برابر شیب محدودیت اول:}\ \frac{۲۴-۲\theta}{۸+\theta}=\frac{۲}{۱}\rightarrow ۲۴-۲\theta=۱۶+۲\theta\Rightarrow ۴\theta=۸\quad\Rightarrow\boxed{\theta=۲}$$

$$\text{شیب تابع برابر شیب محدودیت دوم}\ \frac{۲۴-۲\theta}{۸+\theta}=\frac{۱}{۲}\rightarrow ۴۸-۴\theta=۸+\theta\Rightarrow ۵\theta=۴۰\quad\Rightarrow\boxed{\theta=۸}$$

۳۶. گزینه «۲»

از آن‌جا که در صورت سؤال گفته شده جدول بهینه است، و شرط بهینگی این می‌باشد که اعداد سطر تابع هدف بزرگ‌تر مساوی صفر باشند، در نتیجه با درنظر گرفتن شرط بهینگی برای جدول می‌توان مقدار θ را به‌دست آورد. قبل از هر چیز توجه شود که در جدول داده شده ستون متغیر پایه‌ای $x_۱$ یکه نمی‌باشد و جدول نیاز به یکه سازی دارد، پس خواهیم داشت:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
z	θ	$۴-۳\theta$	۰	۲	۰	۴	$۱۳۵+۴\theta$
x_3	۰		۱		۰		
S_2	۰		۰		۱		
x_1	۱	۱	۰	−۲	۰	−۱	
z	۰	$۴-۴\theta$	۰	$۲+۲\theta$	۰	$۴+\theta$	
x_3							
S_2							
x_1							

$$\xrightarrow{\text{شرط بهینگی}} \begin{cases} ۴-۴\theta \geq ۰ \rightarrow \theta \leq ۱ \\ ۲+۲\theta \geq ۰ \rightarrow \theta \geq -۱ \\ ۴+\theta \geq ۰ \rightarrow \theta \geq -۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱ \leq \theta \leq ۱$$

شرط بیان شده در سؤال این است که $\theta \geq ۰$ می‌باشد.

در نتیجه $۰ \leq \theta \leq ۱$ خواهد بود که بین دو نقطه حد بالا و پایین (نقاط شکست)، $\theta = ۱$ را انتخاب می‌کنیم.

موفق باشید

مسعود یگانه

مشاور دوره : نفیسه رحیمی (رتبه ۱ کنکور سال ۱۳۹۳ با بالاترین درصد تحقیق در عملیات در کنکور سراسری)