مبحث تحلیل حساسیت:

۱. کدام گزینه جدول بهینه را بهتر توصیف می‌کند؟

$$\max z = ۶x_۱ + ۴x_۲ + ۴x_۳$$
$$۳x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ \le ۶۰$$
$$x_۱ + x_۲ \le ۲۴$$
$$x_۱ + ۲x_۳ \le ۳۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$
z						
$x_۱$		$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$		
$S_۲$		$\frac{۱}{۳}$	$\frac{-۲}{۳}$	$\frac{-۱}{۳}$		
$S_۳$		$\frac{-۲}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{-۱}{۳}$		

۱) فقط منبع $S_۱$ کامل مصرف می‌شود و ۲۰ واحد $x_۱$ تولید می‌شود.

۲) فقط منبع $S_۱$ کامل مصرف می‌شود و ۲۰ واحد $x_۲$ تولید می‌شود.

۳) منابع $S_۱$ و $S_۲$ کامل مصرف می‌شوند و ۲۰ واحد $x_۲$ تولید می‌شود.

۴) منابع $S_۱$ و $S_۲$ کامل مصرف می‌شوند و از منبع $S_۳$ ده واحد باقی می‌ماند و ۲۰ واحد $x_۱$ تولید می‌شود.

۲. اگر در مدل زیر تمامی ۴۰ واحد منبع اول و ۱۰ واحد منبع دوم مصرف شود، مقدار تابع هدف کدام است؟

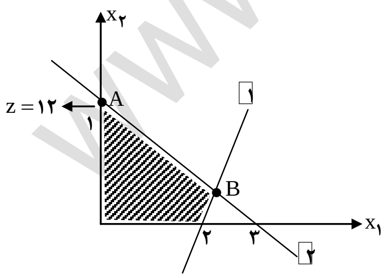
$$\max z = C_۱x_۱ + C_۲x_۲$$
$$a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ \le b_۱$$
$$a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ \le ۳۰$$
$$x_j \ge ۰$$

	$S_۱$	$S_۲$
z	۰/۲	

۱) ۸ ۲) ۱۸

۳) ۵۰ ۴) ۲۸

۳. اگر در مسأله زیر و در نقطه A باقی‌مانده منبع اول ۳ واحد باشد، ارزش ۳ واحد منبع دوم چقدر است؟



۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۵

۴. در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر، جدول بهینه به‌صورت زیر است:

$$\max z = C_1x_1 + C_2x_2$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + S_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + S_2 = b_2$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	
z	۰	۰	۲	۳	$\frac{5}{2}$
x_1	۱	۰	۳	۲	$\frac{5}{2}$
x_2	۰	۱	۱	۱	۱

مقدار $(a_{11}+a_{21}+a_{12})$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) ۰ ۴) $+1$

۵. برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید. اگر بدانیم ماتریس پایه بهینه $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ اســت، قیمت‌های ســایه محدودیت‌ها عبارتند از:

$$\max z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 460$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

۱) $y_1 = \frac{1}{3}\ ,\ y_2 = \frac{7}{3}$ ۲) $y_1 = 3\ ,\ y_2 = 5$

۳) $y_1 = \frac{2}{3}\ ,\ y_2 = \frac{-1}{3}$ ۴) $y_1 = 2\ ,\ y_2 = 1$

۶. جدول بهینه یک مسأله با تابع هدف ماکزیمم‌سازی به‌صورت زیر است:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	
z	۰	۱	۷	۳	۰	M	۵۴
S_2	۰	۱	۲	۱	۱	-1	۱۳
x_1	۱	۲	۳	۱	۰	۰	۱۸

اگر از مقدار سمت راست هریک از محدودیت‌های مسأله، ۳ واحد کاسته شود، مقدار تابع هدف .... می‌یابد.

۱) ۹ واحد کاهش ۲) ۱۵ واحد افزایش

۳) ۶ واحد افزایش ۴) ۱۸ واحد کاهش

۷. مســأله برنامه‌ریزی خطی زیر را به همراه جدول نهایی آن درنظر بگیرید. افزایش هم‌زمان مقادیر ســمت راست محدودیت‌ها به اندازه ۵ واحد چه تأثیری بر مقدار بهینه تابع هدف دارد؟

$$\max z = ۶x_۱ + ۸x_۲$$
$$۵x_۱ + ۲x_۲ \le ۲۰$$
$$x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰$$
$$x_j \ge ۰$$

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	
	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۵}{۲}$
	۰	۱	$\frac{-۱}{۸}$	$\frac{۵}{۸}$	$\frac{۱۵}{۴}$

۱) تابع هدف را ۲۰ واحد زیاد می‌کند.
۲) تابع هدف را ۲۵ واحد زیاد می‌کند.
۳) تأثیری بر مقدار بهینه تابع هدف ندارد.
۴) تابع هدف را ۴۵ واحد افزایش می‌دهد.

۸. جدول نهایی زیر مفروض است. اگر یک متغیر جدید $x_۳$ به مدل اضافه شود و ضریب آن در تابع هدف ۱۰ و میزان مصرف این محصول جدید از منابع تولید به‌ترتیب ۲ و ۲ باشد، در مقدار z چه تغییری حاصل می‌شود؟

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
z	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	۴۵
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۲}$
$x_۲$	۰	۱	$\frac{-۱}{۸}$	$\frac{۵}{۸}$	$\frac{۱۵}{۴}$

۱) به اندازه ۲، برای تولید هر واحد $x_۳$ کاهش می‌یابد.
۲) به اندازه ۱۰، برای تولید هر واحد $x_۳$ اضافه می‌شود.
۳) به اندازه ۲، برای تولید هر واحد $x_۳$ اضافه می‌شود.
۴) تغییری حاصل نمی‌شود.

۹. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید. اگر در جواب بهینه $x_۱$ و $x_۲$ در پایه باشند، سود حاصل چهارم حداقل چقدر افزایش یابد تا تولید آن اقتصادی شود؟

$$\max z = ۵۰x_۱ + ۶۹x_۲ + ۱۷x_۳ + ۳۶x_۴$$
$$۴x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ + ۹x_۴ \le ۲۵$$
$$۲x_۱ + ۶x_۲ + ۸x_۳ + ۴x_۴ \le ۲۶$$
$$x_j \ge ۰$$

۱) ۳۳
۲) ۷۳
۳) ۱/۹
۴) ۴/۷

۱۰. جدول بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی max به صورت زیر است. اگر محدودیت $x_۱ + x_۲ + x_۴ \le ۳$ اضافه شود، مقدار بهینه تابع هدف:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	۲	۰	۰	۱	۲۰
x_2	۱	۱	۰	۲	۵
x_3	۲	۰	۱	۰	۲

۱) تغییری نمی‌کند. ۲) برابر **۲۳** خواهد بود.

۳) برابر **۲۲** خواهد بود. ۴) برابر **۱۸** خواهد بود.

۱۱. یک شرکت تولیدی برای تولید ۳ نوع لاستیک ماشین از ۳ ماده اولیه کربن با خلوص ۴۰%، ۵۸% و ۶۳% استفاده می‌کند. جدول بهینه مدل این مسأله به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2 \\ 3x_1 - 4x_2 &\leq 3 \\ x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	S_2	S_3	
z	۰	۰	۱۱	۰	M	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{85}{3}$
x_1	۱	۰	۴	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{23}{3}$
S_1	۰	۰	۱۵	۱	-۱	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{70}{3}$
x_2	۰	۱	۳	۰	۰	۰	۱	۵

اگر حداقل درصد میزان موردنیاز کربن با خلوص ۴۰%، ۵ واحد شود:

۱) مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد.

۲) متغیر x_3 وارد پایه شده و x_1 خارج می‌شود.

۳) مقدار تابع هدف تغییری نمی‌کند.

۴) گزینه ۲ و ۳

۱۲. با توجه به سؤال قبل، اگر ضریب متغیر x_3 در محدودیت دوم ۷ واحد کم شود ....

۱) مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد.

۲) مقدار تابع هدف نامحدود می‌شود.

۳) متغیر x_3 وارد پایه شده و x_2 خارج می‌شود.

۴) مسأله ناموجه می‌شود.

۱۳. در جدول نهایی مدل برنامه‌ریزی خطی زیر، متغیرهای پایه‌ای عبارتند از $\lfloor S_2, x_3, x_1 \rfloor$. اگر محدودیت جدیدی به شکل $5x_1 + 7x_2 - x_3 \geq 4$ به مسأله اضافه کنیم، جواب بهینه چه تغییری می‌کند؟

$$\begin{aligned} \max\ & C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 64 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

۱) تغییری نمی‌کند.

۲) بیش‌تر می‌شود.

۳) کم‌تر می‌شود یا تغییری نمی‌کند.

۴) کم‌تر می‌شود.

۱۴. برنامه‌ریزی تولید سه محصول به کمک دو ماده خام به‌منظور حداکثر نمودن سود را درنظر بگیرید. اگر سود هر واحد محصول اول به جای ۶ به ۴ تغییر کند:

$$\begin{aligned} \max z = ۶x_۱ + ۸x_۲ + ۵x_۳ \\ ۲x_۱ + ۵x_۲ + x_۳ \le ۴۰ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ \le ۵۰ \\ x_j \ge ۰ \end{aligned}$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۰	۵	۰	۱	۲	۱۴۰
$x_۱$	۱	۳	۰	۱	$\frac{-۱}{۲}$	۱۵
$x_۳$	۰	-۱	۱	-۱	۱	۱۰

۱) جواب فعلی بهینه باقی می‌ماند.

۲) تولید محصول اول قطع و به جای آن محصول دوم تولید می‌شود.

۳) تولید محصول سوم قطع و به جای آن محصول دوم تولید می‌شود.

۴) تولید محصول اول قطع و مقداری از مواد خام اضافه می‌ماند.

۱۵. جدول نهایی زیر داده شده است. دامنه‌ی تغییرات $C_۲$ را برای بهینه ماندن جدول زیر تعیین کنید.

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	
z	۴		۲		۵	
$x_۲$	۲		۲		۱	۷۰
$S_۱$	۳		۲		۲	۸۰

۱) $\Delta_۲ \ge -۲$ ۲) $-۵ \le \Delta_۲ \le -۲$ ۳) $-۲ \le \Delta_۲ \le -۱$ ۴) $\Delta_۲ \ge -۱$

۱۶. یک کارگاه تولیدی سه محصول را به کمک سه منبع مختلف تولید می‌کند. می‌خواهیم سود محصول اول را تا بیش‌ترین حد ممکن کاهش دهیم به شرطی که جدول کماکان بهینه باقی بماند. در این صورت میزان سود کل کارگاه چقدر خواهد شد؟

$$\begin{aligned} \max z = ۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \\ x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \le ۱۰ \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \le ۸ \\ x_۱ + ۲x_۳ \le ۴ \\ x_j \ge ۰ \end{aligned}$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	
z	۰	۰	۱/۵	۰	۰/۵	۱/۵	۱۰
$S_۱$	۰	۰	۳	۱	-۱	۰	۲
$x_۲$	۰	۱	$-۰/۵$	۰	۰/۵	$-۰/۵$	۲
$x_۱$	۱	۰	۲	۰	۱	۱	۴

۱) ۷   ۲) ۵

۳) ۴   ۴) ۸

پاسخ‌نامه «روابط ماتریسی و تحلیل حساسیت»

۱. گزینه «۱»

آن‌گونه که در مبحث سیمپلکس بیان شد، مقدار متغیرهای کمکی، میزان باقی‌مانده منبع را نشان می‌دهند. متغیر $S_۱$ غیراساسی است، پس مقدار آن صفر است و بدین معنی است که کامل مصرف شده است. اما مقدار متغیرهای $S_۲$ و $S_۳$ در جدول مشخص نشده است، که می‌توانیم با استفاده از روابط ماتریسی آن را به‌دست آوریم، که در این صورت مقدار اعداد سمت راست از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید:

$$b'_i = B^{-1} b_i$$

$$b'_i = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ \frac{-۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{-۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۶۰ \\ ۲۴ \\ ۳۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲۰ \\ ۴ \\ ۱۰ \end{pmatrix}$$

که با توجه به جدول و ترتیب متغیرهای اساسی مشخص می شود که $x_۱ = ۲۰$، $S_۲ = ۴$ و $S_۳ = ۱۰$ می‌باشد، پس ۴ واحد از منبع دوم و ۱۰ واحد از منبع سوم باقی می‌ماند و ۲۰ واحد $x_۱$ تولید می‌شود.

۲. گزینه «۱»

از آن‌جا که مطرح شده تمامی ۴۰ واحد منبع اول مصرف می‌شود، پس نتیجه می‌شود که $b_۱ = ۴۰$ و $S_۱ = ۰$ و چون تنها ۱۰ واحد از منبع دوم مصرف می‌شود پس ۲۰ واحد از منبع دوم باقی می‌ماند که یعنی $S_۲$ در پایه با مقدار ۲۰ خواهد بود.

حال با توجه به این‌که مقادیر y و b_i مشخص است، می‌توانیم مقدار تابع هدف را با استفاده از رابطه ماتریسی زیر به‌دست آوریم:

	$S_۱$	$S_۲$	
	۰/۲	۰	
		۰	
$S_۲$		۱	۲۰

$$z = y_i b_i = \begin{pmatrix} ۰/۲ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۴۰ \\ ۳۰ \end{pmatrix} = ۸$$

* اگر دقت کنید این سؤال را می‌توان با استفاده از مسأله ثانویه نیز حل کرد، بدین‌صورت که تابع هدف ثانویه z و مقادیر y ها مشخص است، پس مقدار آن عبارتست از:

$$\begin{aligned} \min w &= ۴۰y_۱ + ۳۰y_۲ \\ &= ۴۰(۰/۲) + ۳۰(۰) = ۸ \end{aligned}$$

۳. گزینه «۳»

از شکل مشخص است که در نقطه B، $x_۱$ و $x_۲$ اساسی و در پایه هستند. و طبق شکل در نقطه A، $x_۲$ و $S_۱$ اساسی می‌باشند و همان‌طورکه گفته شد، $S_۱$ با مقدار ۳ در پایه است، پس جدول به شکل زیر تغییر می‌کند:

	B	
$x_۲$		$b'_۱$
$x_۱$		$b'_۲$

	A	
$x_۲$		۱
$S_۱$		۳

جدول حال

	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	
z			۰	$y_۲$	۱۲
$x_۲$					۱
$S_۱$					۳

از آن‌جا که مقدار تابع هدف در نقطه A را داریم، می‌توانیم با اســـتفاده از رابطه مقدار تابع هدف $(z = y_i b_i)$، ارزش منبع دوم را به‌دســـت آوریم، اما دقت کنیم که در این رابطه به اعداد ســـمت راســـت جدول ابتدایی (اعداد ســـمت راســـت محدودیت‌ها) نیاز داریم که اگر کمی به شکل دقت کنیم، می‌توانیم محدودیت‌ها را از روی شکل بنویسیم (محدودیت اول را نمی‌توانیم بنویسیم و عدد سمت راستش را مشخص کنیم، اما وقتی رابطه را بنویسیم، متوجه می‌شویم که برای به‌دست آوردن ارزش منبع دوم اصلاً نیازی به آن نداریم)

محدودیت دوم: $x_۱ + ۳x_۲ \le ۳ \quad \Rightarrow \quad b_۲ = ۳$

$$z = y_i b_i = \begin{pmatrix} ۰ & y_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_۱ \\ ۳ \end{pmatrix} = ۳y_۲ \quad \Rightarrow ۳y_۲ = ۱۲$$
$$y_۲ = ۴$$

پس ارزش هر واحد منبع دوم ۴ می‌باشد، و ارزش ۳ واحد آن می‌شود:

$۳ \times ۴ = ۱۲$

---

۴. گزینه «۱»

دقت کنیم که $B^{-۱}$ معکوس ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیت‌هاست. (در این سؤال به‌ترتیب $x_۱$ و $x_۲$) پس اگر دوباره از $B^{-۱}$ معکوس بگیریم و به B برسیم، عملاً توانسته‌ایم به ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها دست پیدا کنیم:

$$B^{-۱} = \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \rightarrow \left(B^{-۱}\right)^{-۱} = \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}^{-۱} = \frac{\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix}}{۳-۲} = \begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

$a_{۱۱} = ۱ / a_{۲۱} = -۱$ **ضرایب $x_۱$ در محدودیت‌ها:**

$a_{۱۲} = -۲ / a_{۲۲} = ۳$ **ضرایب $x_۲$ در محدودیت‌ها:**

$$a_{۱۱} + a_{۲۱} + a_{۱۲} = ۱ + (-۱) + (-۲) = -۲$$

۵. گزینه «۱»

می‌دانیم که ماتریس B، ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیت‌هاست، پس با داشتن ماتریس B ؟؟؟ مشخص کنیم، پس متغیرهای اساسی در این پایه عبارتند از: $x_۲$, $x_۳$

$$B=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$ **x_2 و x_3 اساسی هستند.**

ضرایب x_2 در محدودیت‌ها ← ستون اول

ضرایب x_3 در محدودیت‌ها ← ستون دوم

برای به‌دست آوردن قیمت‌های سایه به B^{-1} نیز نیاز داریم که با معکوس کردن B به‌دست می‌آید:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}{4-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

رابطه قیمت‌های سایه $y=C_BB^{-1}$ می‌باشد که در این رابطه C_B ضریب متغیرهای اساسی در تابع هدف می‌باشد که با استفاده از ماتریس B متوجه شدیم که x_2 و x_3 در پایه هستند، پس قیمت‌های سایه مطابق روبه‌رو خواهند بود:

$$y=C_BB^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{7}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow y_1=\frac{1}{3}\ ,\ y_2=\frac{7}{3}$$

---

۶. گزینه «۱»

هنگامی که فقط بخشی از مدل تغییر می‌کند، می‌توانیم با استفاده از روابط ماتریسی آن بخش از جدول نهایی که دچار تغییر می‌شود را بروز کنیم و ببینیم چه اتفاقی برای جدول نهایی پیش می‌آید و آن را تحلیل کنیم.

با تغییر سمت راست محدودیت‌ها، اعداد سمت راست جدول و همین‌طور مقدار تابع هدف تغییر می‌کنند. برای بررسی میزان تغییر جدول، می‌توانیم تغییرات را در مدل اعمال کرده و با استفاده از روابط $b'_i=B^{-1}b_i$ و $z=y_ib_i$ مقدار جدید اعداد سمت راست و تابع هدف را به‌دست آوریم.

اما از آن‌جا که مدل اولیه را نداریم، می‌توانیم روابط را به شکل مقابل تغییر داده و از آن‌ها استفاده کنیم:

$$\Delta b'_i=B^{-1}\Delta b_i \rightarrow \Delta b'_i=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -3\end{pmatrix}\rightarrow b'_{i\,\text{جدید}}=\begin{pmatrix}13-0\\ 18-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\ 18\end{pmatrix}\rightarrow$$ موجه باقی می‌ماند.

$$\Delta z=y_i\Delta b_i \rightarrow \Delta z=\begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 3\end{pmatrix}=-9\rightarrow$$ ۹ واحد کاهش

※ دقت کنیم که این روابط میزان تغییر اعداد سمت راست و تابع هدف را نشان می‌دهند، نه مقدار جدید آن‌ها.

۷. گزینه «۱»

گفتیم که تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، باعث تغییر سمت راست جدول و مقدار تابع هدف می‌شود. قبل از این‌که ببینیم تابع هدف چه مقدار تغییر می‌کند، ابتدا مقادیر جدید اعداد سمت راست را به‌دست می‌آوریم تا از موجه بودن جدول درحالت جدید مطمئن شویم.

$$b'_{i\,\text{جدید}} = B^{-1} b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{4} \\ \frac{50}{8} \end{pmatrix}$$ → پس جدول موجه می‌ماند.

$$\Delta z = y_i \Delta b_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 20$$ → مقدار تابع هدف **۲۰** واحد افزایش می‌یابد.

۸. گزینه «۳»

هنگامی که یک متغیر جدید به مدل اضافه می‌شود، باید دید که آیا اضافه شدن آن سودی ایجاد می‌کند یا خیر. درصورتی متغیر جدید برای مسأله سود خواهد داشت که ورودی شود و در نتیجه با وارد شدن، جدول ادامه پیدا کرده و مقدار z بهبود یابد. برای این‌که ببینیم ورودی می‌شود یا نه، باید مقدار آن در سطر تابع هدف $(z_j - C_j)$ در جدول نهایی را به‌دست آوریم که درصورتی‌که منفی باشد (چون مسأله max است) ورودی می‌شود، در این صورت با محاسبه P'_x برای آن، می‌توان min نسبت و خروجی را تشخیص داده و میزان تغییر تابع را به‌دست آورد.

$$(z_j - C_j)_{x_3} = -C_3 + y_i P_{x_3} = -10 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 < 0$$ → ورودی می‌شود و به نفع تابع خواهد بود.

$$P'_{x_3} = B^{-1} P_{x_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	$\downarrow x_3$	
z	-2	
x_1	1	$\frac{5}{2}$
x_2	1	$\frac{15}{4}$

$\rightarrow \min_{\text{نسبت}} = \frac{5}{2}$

$$\Delta z = -(-2)\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \end{pmatrix} = 5$$ → به مقدار z به اندازه

۵ واحد اضافه می‌شود که چون ضریب x_3 در تابع هدف **۱۰** می‌باشد، پس یعنی به‌ازای تولید هر واحد x_3، $\frac{10}{5} = 2$ واحد به مقدار z اضافه شده است.

۹. گزینه «۲»

همان‌طورکه گفتیم درصورتی تولید یک محصول اقتصادی خواهد شد، که در جدول سیمپلکس ورودی شود. حال در دو صورت می‌تواند ورودی شود:

$z_j - C_j < 0 \rightarrow$ (حالت max) ورودی شدن با تغییر مقدار تابع هدف

$z_j - C_j = 0 \rightarrow$ (حالت max) ورودی شدن با عدم تغییر مقدار تابع هدف

که حالت دوم، حالتی است که بهینه چندگانه خواهد شد و با ورودی شدن متغیر، مقدار z تغییر نمی‌کند.

پس در این سؤال برای آن‌که تولید محصول چهارم اقتصادی شود، باید ورودی شود که در این صورت:

$$\left(z_j - C_j\right)_{x_4} \le 0$$

$$y_i P_{x_4} - C_4 \le 0$$

$$\begin{cases} y_i = C_B B^{-1} = (50 \quad 69)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = (9 \quad 7) \\ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}{18} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \end{cases}$$

ستون x_1 در محدودیت‌ها

ستون x_2 در محدودیت‌ها

$$y_i P_{x_4} - C_4 \le 0 \Rightarrow (9 \quad 7)\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} - C_4 \le 0$$

$109 - C_4 \le 0 \Rightarrow C_4 \ge 109 \Rightarrow$ یعنی سود x_4 حداقل باید **۱۰۹** باشد

پس باید نسبت به الآن **۷۳** = **۳۶**−**۱۰۹** واحد افزایش یابد.

۱۰. گزینه «۴»

هنگامی که محدودیت جدید به مدل اضافه می‌شود، **۲** حالت ممکن است پیش بیاید، یا نقطه بهینه داخل محدودیت خواهد بود که در این صورت اضافه شدن محدودیت تغییری در مقدار تابع هدف ایجاد نمی‌کند، یا محدودیت جدید باعث خارج شدن نقطه بهینه از منطقه موجه خواهد شد، که در این صورت مقدار تابع هدف تغییر کرده و بدتر می‌شود و باید محدودیت را به جدول نهایی اضافه کرده و با یکه کردن جدول و حل از طریق سیمپلکس ثانویه مقدار جدید تابع هدف را به‌دست آورد. حال در این‌جا برای این‌که ببینیم نقطه بهینه داخل محدودیت خواهد بود یا خارج از آن، نقطه را داخل محدودیت گذاشته تا ببینیم صدق می‌کند یا نه:

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_4 \le 3 \\ 0 + 5 + 0 \le 3 \quad \Rightarrow \quad 5 \le 3 \; \times \end{matrix}$$

پس نقطه بهینه فعلی داخل محدودیت صدق نکرد در نتیجه مقدار تابع هدف تغییر می‌کند و بدتر می‌شود.

البته دقت کنید که در این سؤال دیگر نیازی به اضافه کردن محدودیت به جدول و حل از طریق سیمپلکس ثانویه نیست، چرا که می‌دانیم مقدار تابع هدف بدتر می شود و تنها گزینه‌ای که مقدارش از $z = 20$ کم‌تر است، گزینه چهارم می‌باشد.

۱۱. گزینه «۳»

در سؤال‌های قبل گفتیم که تغییر سمت راست محدودیت می‌تواند بر اعداد سمت راست جدول و مقدار تابع هدف اثر بگذارد و باید مقادیر اعداد سمت راست جدید را به‌دست آوریم تا از موجه بودن جدول اطمینان حاصل کنیم.

$$b'_{i\,\text{جدید}} = B^{-1} b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} \\ -۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۵ \\ ۳ \\ ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۲۳}{۳} \\ \frac{۶۱}{۳} \\ ۵ \end{pmatrix}$$

همان‌طورکه مشــخص اســت، جدول موجه باقی می‌ماند و فقط مقدار باقی‌مانده منبع اول **۳** واحد کاهش می‌یابد. مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند، چرا که ارزش منبع اول صفر است ($S_۱$ در پایه است) و اضافه شدن آن سودی اضافه نمی‌کند، طبق روابط نیز خواهیم داشت:

$$z_{\text{جدید}} = y_i b_{i\,\text{جدید}} = \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۵}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۵ \\ ۳ \\ ۵ \end{pmatrix} = \frac{۸۵}{۳}$$

* دقت کنید هنگامی که محدودیتی بزرگ‌تر مســاوی اســت و در جدول هم S و هم R برای یک محدودیت داریم، اعداد زیر R هستند که y و B^{-1} را تشکیل می‌دهند.

۱۲. گزینه «۳»

درصــورتی‌که ضــریب متغیر در محدودیت تغییر کند، می‌تواند باعث تغییر اعداد ســتون آن متغیر در جدول نهایی (یعنی $z_j - C_j$ و P'_x آن متغیر) شــود، در نتیجه امکان دارد جدول بهینه را غیربهینه و یا بهینه چندگانه کند و یا منطقه موجه و حتی جواب را نامحدود کند که با به‌دســت آوردن ســتون جدید متغیر، می‌توان تغییرات را بررســی کرد. برای به‌دســت آوردن ستون جدید از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} \text{کل ستون} \\ \text{متغیر } x_j \\ \text{در جدول نهایی} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{کل ستون} \\ \text{S یا R} \\ \text{محدودیت در} \\ \text{در جدول نهایی} \end{pmatrix} \Delta a_{ij} = \begin{pmatrix} \text{کل ستون} \\ \text{جدید متغیر } x_j \\ \text{در جدول نهایی} \end{pmatrix}$$

ضریب متغیر $x_۳$ در محدودیت دوم **۷** واحد کاهش یافته $\Rightarrow \Delta a_{۲۳} = -۷$

$$-۷ \begin{pmatrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \\ ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱۱ \\ ۴ \\ ۱۵ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-۲}{۳} \\ \frac{۵}{۳} \\ \frac{۳۱}{۳} \\ ۳ \end{pmatrix}$$

در نتیجه جدول غیربهینه خواهد شد و از آن‌جا که $z_j - C_{j(x_3)}$ منفی است، پس x_3 ورودی می‌شود و با استفاده از قانون min نسبت خروجی را انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c}
 & x_3 \downarrow & \\
\hline
z & -\frac{2}{3} & \\
x_1 & \frac{5}{3} \leftarrow \frac{23}{5} & \frac{23}{3} \\
S_1 & \frac{31}{3} \leftarrow \frac{70}{31} & \frac{70}{3} \\
\underleftarrow{x_2} & 3 \leftarrow \frac{5}{3} & 5
\end{array}$$

که مشخص می‌شود که x_2 خروجی خواهد بود.

۱۳. گزینه «۱»

برای این‌که ببینیم آیا محدودیت جدید باعث تغییر نقطه بهینه و همین‌طور مقدار تابع هدف می‌شود یا نه، باید بررسی کنیم که آیا نقطه بهینه فعلی در محدودیت جدید صدق می‌کند یا نه و در صورتی‌که صدق کرد، پس نقطه بهینه تغییر نکرده است و درصورتی‌که صدق نکند، نقطه بهینه تغییر کرده و مقدار تابع هدف بدتر می‌شود. از آن‌جا که ماتریس B^{-1} را داریم، پس می‌توانیم مقادیر سمت راست (که همان مختصات نقطه بهینه است) را به‌دست آوریم:

$$b_i' = B^{-1} b_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 40 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 \\ \rightarrow x_3 \\ \rightarrow S_2 \end{array}$$

$$5x_1 + 7x_2 - x_3 \geq 4 \quad \Rightarrow 5(8) + 7(0) - 20 \geq 4$$

$$20 \geq 4 \quad \Rightarrow$$ پس نقطه بهینه و مقدار z تغییری نمی‌کند.

۱۴. گزینه «۴»

$$\left(z_j - C_j\right)_{x_1\ \text{جدید}} = \left(z_j - C_j\right)_{x_1\ \text{فعلی}} - \left(\Delta C_j\right)_{x_1}$$

از آن‌جا که x_1 متغیر پایه‌ای است، پس نیاز به یکه‌سازی دارد. $\left(z_j - C_j\right)_{x_1\ \text{جدید}} = 0 - (-2) = +2 \rightarrow$

یکسازی

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
z	۲	۵	۰	۱	۲	۱۴۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰
z	۰	۱-	۰	۱-	۳	۱۱۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰

حال با توجه به جدول هم x_2 (محصول دوم) و هم S_1 (مانده منبع اول) شرط ورود دارند و در هردو حالت چون باید به اعداد مثبت ستون لولا تقسیم کنیم، فقط x_1 می‌تواند خارج شود، پس یا گزینه ۲ درست است یا گزینه ۴.

در این مواقع که شرایط ورود یکسان است باید سطر تابع هدف جدول نوشته شود تا ببینیم با ورود کدام متغیر جدول بعد بهینه می‌شود (فقط محاسبه سطر z جدول بعد). و همان‌طورکه مشاهده می‌شود، درصورت ورود S_1 جدول بعد بهینه خواهد بود.

درصورت ورود S_1

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow S_1$	S_2	
z	۰	۱-	۰	۱-	۳	۱۱۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰
z	۱	۲	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۱۲۵

جدول بهینه می‌شود.

درصورت ورود x_2

	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	S_1	S_2	
z	۰	۱-	۰	۱-	۳	۱۱۰
x_1	۱	۳	۰	۱	$\frac{-1}{2}$	۱۵
x_3	۰	۱-	۱	۱-	۱	۰
z	$\frac{1}{3}$	۰	۰	$\frac{-2}{3}$	$\frac{17}{6}$	۱۱۵

جدول غیربهینه باقی می‌ماند.

۱۵. گزینه «۴»

برای تعیین دامنه تغییرات متغیرهای اساسی کافیست سطر z را بر سطر متغیر پایه‌ای تقسیم کنیم (به‌جز R و متغیرهای اساسی)، سپس کوچک‌ترین نسبت مثبت، قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان کاهش C_j را مشخص می‌کند ($\Delta C_j \geq -$(کوچک‌ترین نسبت مثبت)) و کوچک‌ترین نسبت منفی (از نظر قدرمطلق) قرینه شده و بزرگ‌ترین میزان افزایش C_j را نشان می‌دهد ($\Delta C_j \leq -$(کوچک‌ترین نسبت منفی از نظر قدرمطلق)).

متغیر x_2 نیز اساسی است، پس سطر z را بر سطر x_2 تقسیم می‌کنیم:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
z	۴		۲		۵
x_2	۲		۲		۱
	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
	$\frac{۴}{۲}=۲$		$\frac{۲}{۲}=۱$		$\frac{۵}{۱}=۵$

تمام نسبت‌ها مثبت است و قرینه کم‌ترین نسبت مثبت حد پایین قرار می‌گیرد.

* نسبت منفی نداریم، یعنی حدی برای بالا نداریم.

$$\boxed{-۱\le \Delta C_2}$$

---

۱۶. گزینه «۱»

چون x_1 اساسی است، همان‌طورکه توضیح داده شد، برای محاسبه بازه مجاز آن کافیست سطر z را بر سطر x_1 تقسیم کنیم (اساسی‌ها تقسیم نمی‌شوند):

	x_3	S_2	S_3
z	۱/۵	۰/۵	۱/۵
x_1	۲	۰	۱
	$\downarrow$	$\Downarrow$	$\downarrow$
	$\frac{۱/۵}{۲}=\frac{۳}{۴}$	∞	$\frac{۱/۵}{۱}=۱/۵$

$$\Rightarrow \frac{-۳}{۴}\le \Delta C_1 \Rightarrow ۱/۲۵\le C_1$$

از آن جا که C_1 می‌تواند به میزان ۰/۷۵ کاهش یابد و بهینگی جدول تغییر نکند، پس حداقل آن ۱/۲۵ خواهد بود $(۲-۰/۷۵=۱/۲۵)$

در این صورت میزان سود کارگاه خواهد شد:

$$z=۱/۲۵(۴)+۲+۰=۷$$

حداقل سود x_1
مقدار x_1 در جدول
مقدار x_2 در جدول

موفق باشید

مسعود یگانه

<u>مشاور دوره : نفیسه رحیمی (رتبه ۱ کنکور سال ۱۳۹۳ با بالاترین درصد تحقیق در عملیات در کنکور سراسری)</u>